



Régulation LQ/LQG

*Note de cours*

D.Alazard

PAGE SANS TEXTE

# Sommaire

<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>1 Éléments de théorie de LYAPUNOV sur la stabilité</b>	<b>7</b>
1.1 Définition de la stabilité . . . . .	7
1.2 Fonctions de LYAPUNOV . . . . .	8
1.3 Stabilité au sens de LYAPUNOV : méthode directe . . . . .	8
1.4 Stabilité des systèmes linéaires . . . . .	11
<b>2 La commande LQ</b>	<b>13</b>
2.1 Principe . . . . .	13
2.2 Résolution de l'équation de RICCATI: . . . . .	16
2.3 Propriétés asymptotiques . . . . .	18
2.4 Exercices ... . . . .	22
2.4.1 ... sur la double intégration . . . . .	22
2.4.2 ... sur le "root square locus" . . . . .	23
<b>3 La commande LQG</b>	<b>25</b>
3.1 Principe général . . . . .	25
3.2 Propriétés . . . . .	27
3.3 Synthèse LQG/LTR (Loop Transfert Recovery) . . . . .	27
3.4 Synthèse LQG discrète . . . . .	28
3.4.1 Filtre de KALMAN discret (régime permanent) . . . . .	29
3.4.2 Retour d'état optimal en discret . . . . .	30
3.4.3 Forme "prédicteur" . . . . .	30
3.4.4 Forme "estimateur" . . . . .	30
3.5 Exercices . . . . .	31
3.5.1 Système du premier ordre . . . . .	31
3.5.2 Système du second ordre . . . . .	32



---

3.5.3	LQG discret . . . . .	32
<b>4</b>	<b>Forme LQG équivalente</b>	<b>35</b>
4.1	Principe général . . . . .	35
4.2	Calcul des paramètres . . . . .	36
4.3	Intérêts pratiques . . . . .	37
4.4	Illustration . . . . .	38
4.5	Exercice . . . . .	40
<b>5</b>	<b>La forme standard</b>	<b>41</b>
5.1	Introduction . . . . .	41
5.2	Liens entre synthèse $H_2$ et synthèse LQG . . . . .	42
5.3	Pondérations fréquentielles . . . . .	43
	<b>Références</b>	<b>45</b>
	<b>BE sur MATLAB</b>	<b>47</b>

# Introduction

Ces notes de cours présentent une introduction aux techniques de commande **Linéaire Quadratique (LQ)** et **Linéaire Quadratique Gaussienne (LQG)**.

Nous rappelons dans un premier temps la théorie de la stabilité au sens de LYAPUNOV dans le cadre général des systèmes non-linéaires et introduisons la notion de fonction de Lyapunov. L'intérêt de ces *méthodes d'analyse* dites de LYAPUNOV est de juger la stabilité d'un système sans intégrer les équations différentielles qui décrivent son comportement. L'inconvénient est qu'elles ne fournissent que de *conditions suffisantes* et que l'on ne peut rien conclure si la condition n'est pas satisfaite. Elles peuvent, pour les mêmes raisons, fournir un résultat pessimiste (ou *conservatif*). Nous nous recentrons alors rapidement sur le cas des systèmes linéaires où le théorème de LYAPUNOV fournit une *condition nécessaire et suffisante* de stabilité.

Dans le second chapitre, nous présentons la commande LQ par *retour statique d'état*. Par rapport au problème général de la *commande optimale* fondée sur le *principe du maximum* (tel qu'il est présenté dans [4]), nous nous polarisons sur le problème de la régulation à horizon libre des systèmes linéaires avec critère quadratique. Dans ce contexte, le théorème de LYAPUNOV est une alternative intéressante pour démontrer les résultats de la régulation LQ. Nous présentons également les propriétés de robustesse et les comportements asymptotiques de la commande LQ. Enfin, nous nous intéressons au *lieu des racines au carré* (Root square locus) qui est un outil graphique permettant de guider le choix des pondérations sur des considérations modales dans le plan complexe.

La synthèse LQG de *retours dynamiques de sortie*, qui combine un retour d'état LQ et un filtre de Kalman, est abordée dans la troisième partie. Nous présentons principalement les propriétés structurelles de la commande LQG (*principe de séparation*), la procédure de réglage LTR (*Loop Transfer Recovery* dont l'objectif est de restaurer les marges de stabilité du retour d'état LQ idéal et la synthèse LQG discrète.

Dans le chapitre 4 nous présentons le *problème inverse*, c'est-à-dire : comment calculer, pour un système et un correcteur quelconque donnés, les éléments du correcteur LQG équivalent. L'intérêt d'une telle reformulation des correcteurs est présentée dans le cadre de l'implantation de lois de commande.

Dans le dernier chapitre, la synthèse LQG est présentée sous le formalisme maintenant général de la *forme standard* et de la *synthèse  $H_2$* .

Ce document doit être considéré comme un résumé ou un formulaire extrait de [1]. Seules les démonstrations qui ne sont pas présentes dans la référence [1] sont détaillées dans ce document. Il s'agit principalement de la démonstration de la commande LQ par l'approche de LYAPUNOV, du *Root square locus* et de la synthèse LQG discrète.

# Chapitre 1

## Éléments de théorie de LYAPUNOV sur la stabilité

### 1.1 Définition de la stabilité

Considérons un système continu de dimension finie décrit par une équation différentielle vectorielle non-linéaire du premier ordre :

$$\dot{x} = f(x) \quad x \in \mathcal{R}^n \quad (1.1)$$

**Définition 1.1 (Point d'équilibre)** *Un vecteur  $x_e \in \mathcal{R}^n$  est dit point ou état d'équilibre si :*

$$f(x_e) = 0$$

Remarque : tout point d'équilibre peut être ramené à l'origine par un simple changement de variable  $x \leftarrow x - x_e$ . Donc, sans perte de généralité, les définitions et théorèmes qui suivent seront établis en considérant :

$$x_e = 0$$

**Définition 1.2 (Stabilité locale simple et asymptotique)** *L'état d'équilibre  $x_e = 0$  du système 1.1 est :*

- *stable si, pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $r = r(\epsilon)$ , tel que :*

$$\|x(t=0)\| < r \Rightarrow \|x(t)\| < \epsilon \quad \forall t > 0$$

- *instable, si non stable,*

- *asymptotiquement stable, s'il est stable et si  $r$  peut être choisi tel que :*

$$\|x(t=0)\| < r \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

- *marginale*ment stable, s'il est stable sans être asymptotiquement stable.

Physiquement, la stabilité au sens de LYAPUNOV garantit que la trajectoire restera à l'intérieur de la boucle  $\mathcal{B}(x_e, \epsilon)$  si son point de départ appartient à une boule  $\mathcal{B}(x_e, r)$ . La stabilité asymptotique inclut cette propriété, mais spécifie de plus que toute trajectoire initialisée dans la boule  $\mathcal{B}(x_e, r)$  converge vers  $x_e$ .

Dans ce qui suit et par abus de langage, on parle de stabilité du système au lieu de parler de stabilité du point d'équilibre.

**Définition 1.3 (Stabilité asymptotique globale)** *Si le système est asymptotiquement stable quel que soit le vecteur d'état initial  $x(t = 0)$  alors le point d'équilibre est globalement asymptotiquement (ou exponentiellement) stable.*

## 1.2 Fonctions de LYAPUNOV

**Définition 1.4 (Fonction définie positive)** *Une fonction scalaire  $U(x)$  continuellement différentiable (par rapport à  $x$ ) est dite définie positive dans une région  $\Omega$  autour de l'origine si :*

$$(1) U(0) = 0,$$

$$(2) U(x) > 0 \text{ pour tout } x \in \Omega / x \neq 0.$$

si (2) est remplacé par  $U(x) \geq 0$  alors la fonction est dite définie semi-positive.

**Définition 1.5 (Fonction quadratique définie positive)** *La fonction quadratique  $U(x) = x^T Q x$ , où  $Q_{n \times n}$  est une matrice réelle symétrique, est dite définie positive si toutes les valeurs propres de la matrice  $Q_{n \times n}$  sont strictement positives.*

Les fonctions quadratiques sont souvent utilisées dans l'analyse des systèmes dynamiques (*fonction de LYAPUNOV*). Notamment : l'énergie cinétique, l'énergie potentielle élastique ou de gravité et l'énergie totale sont des fonctions quadratiques de l'état pour les systèmes mécaniques.

**Exemple 1.1** -  $U_1(x) = x_1^2 + x_2^2$  est définie positive dans  $\mathcal{R}^2$  et semi-définie positive dans  $\mathcal{R}^3$ ,  
-  $U_2(x) = (x_1 + x_2)^2$  est seulement semi-définie positive dans  $\mathcal{R}^2$  car nulle sur la droite  $x_1 + x_2 = 0$ .

## 1.3 Stabilité au sens de LYAPUNOV : méthode directe

La stabilité au sens de LYAPUNOV est une traduction mathématique d'une constatation élémentaire : si l'énergie totale d'un système se dissipe continuellement



(c'est-à-dire décroît avec le temps) alors ce système (qu'il soit linéaire ou non, stationnaire ou non) tend à se ramener à un état d'équilibre (il est stable). La *méthode directe* cherche donc à générer une fonction scalaire de type énergétique qui admet une dérivée temporelle négative.

**Théorème 1.1 (Stabilité locale)** *L'état d'équilibre  $x_e = 0$  est stable si il existe une fonction continuellement dérivable  $U(x)$  telle que :*

- (1)  $U(0) = 0$ ,
- (2)  $U(x) > 0 \quad \forall x \neq 0, x \in \Omega$ ,
- (3)  $\dot{U}(x) \leq 0 \quad \forall x \neq 0, x \in \Omega$ ,

où  $\dot{U}$  est la dérivée de  $U$  par rapport au temps et  $\Omega$  est une région autour de 0. Si de plus (3) est remplacée par  $\dot{U}(x) < 0$  alors l'état d'équilibre est asymptotiquement stable.

Le fonction  $U(x)$  est appelée *fonction de LYAPUNOV*.

Ce théorème est une condition suffisante de stabilité mais ne permet pas de guider l'utilisateur dans le choix de la fonction de LYAPUNOV et ne permet pas de conclure si on ne trouve pas une telle fonction. Une *fonction de LYAPUNOV candidate* est une fonction définie positive dont on teste la décroissance autour du point d'équilibre. L'étude des méthodes qui permettent de construire une *fonction de LYAPUNOV candidate* pour un système donné a motivé une littérature très abondante ces dernières décennies dont la revue dépasse le cadre de document. Les formes quadratiques sont les plus utilisées notamment les fonctions définies positives qui sont des intégrales premières (c'est-à-dire dont la dérivée temporelle est nulle) du système idéalisé (par exemple l'énergie totale d'un système mécanique idéalement conservatif, voir exemple suivant).

**Théorème 1.2 (Stabilité globale)** *L'état d'équilibre  $x_e$  est globalement asymptotiquement stable si il existe une fonction continuellement dérivable  $U(x)$  telle que :*

- (1)  $U(0) = 0$ ,
- (2)  $U(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$ ,
- (3)  $\dot{U}(x) < 0 \quad \forall x \neq 0$ ,
- (4)  $\dot{U} \rightarrow \infty$  as  $\|x\| \rightarrow \infty$ .

**Exemple 1.2** *Considérons le système décrit par une équation différentielle ordinaire non-linéaire :*

$$\ddot{x}(t) - \epsilon x^2(t)\dot{x} + x(t) = 0$$

*Sous forme d'état, avec les définitions  $x_1 = x$ ,  $x_2 = \dot{x}$ , nous obtenons :*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + \epsilon x_1^2 x_2 \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que “cet oscillateur avec une fonction d’amortissement non-linéaire” a un état d’équilibre à l’origine  $(x_1, x_2) = (0, 0)$ . Pour l’analyse de la stabilité nous choisirons la fonction de LYAPUNOV candidate suivante :

$$U(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}$$

Ce choix est fondé sur une considération physique : c’est une intégrale première (énergie mécanique totale) du système idéalement conservatif obtenu pour  $\epsilon = 0$ . Le calcul de  $\dot{U}$  donne :

$$\begin{aligned}\dot{U}(x_1, x_2) &= x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 \\ &= x_1x_2 + x_2(-x_1 + \epsilon x_1^2 x_2) \\ &= \epsilon x_1^2 x_2^2\end{aligned}$$

Donc  $U$  est une fonction définie positive qui est strictement décroissante le long de toutes les trajectoires du système si  $\epsilon < 0$ . D’après les théorèmes précédents, l’état d’équilibre  $(0, 0)$  est globalement stable pour  $\epsilon = 0$ , est globalement asymptotiquement stable si  $\epsilon < 0$ , globalement instable sinon. Dans cet exemple, l’analyse est complète car elle a permis de caractériser la stabilité globale du système. Ce n’est pas toujours le cas et cela dépend de la fonction de LYAPUNOV candidate comme le montre l’exemple suivant.

**Exemple 1.3** Considérons maintenant le système défini par :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1(x_2^2 - 1) \\ \dot{x}_2 = -x_2(x_1^2 + 1) \end{cases}$$

qui présente un point d’équilibre à l’origine et considérons la même fonction de LYAPUNOV candidate que précédemment :

$$U_1(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}$$

On a alors :

$$\begin{aligned}\dot{U}_1(x_1, x_2) &= x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 \\ &= x_1^2 x_2^2 - 2x_1^2 - x_2^2.\end{aligned}$$

$\dot{U}_1 < 0$  si  $x_1^2 x_2^2 - 2x_1^2 - x_2^2 < 0$ . Dans le plan  $(x_1^2, x_2^2)$ , on peut tracer le domaine de stabilité suggéré par cette fonction de LYAPUNOV candidate. On obtient alors la figure 1.1.

Si l’on considère maintenant la fonction de LYAPUNOV candidate suivante :

$$U_2(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 + 2x_2^2}{2},$$

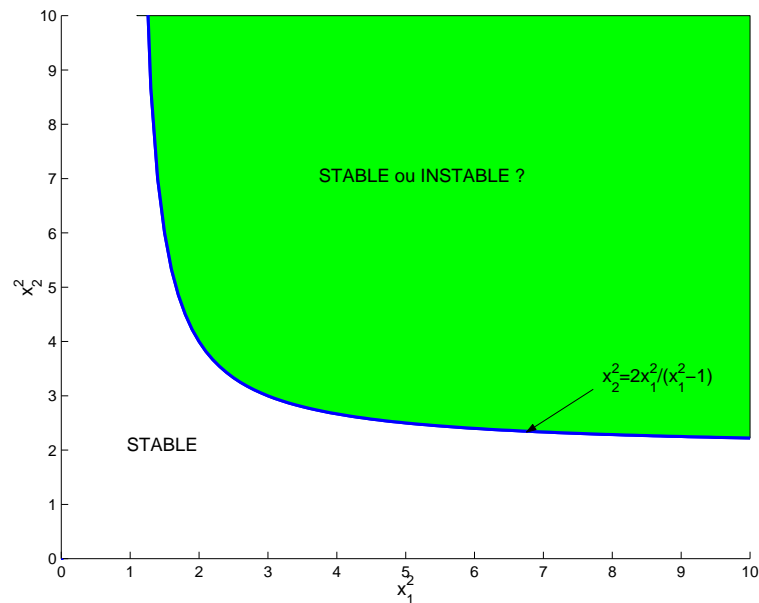


FIG. 1.1 – *Domaine stabilité suggéré par  $U_1(x_1, x_2)$ .*

nous obtenons :

$$\begin{aligned}\dot{U}_2(x_1, x_2) &= x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 \\ &= -2x_1^2 - 2x_2^2\end{aligned}$$

et nous pouvons conclure que le système est globalement asymptotiquement stable dans tout l'espace d'état  $(x_1, x_2)$ . On dit que la première fonction de LYAPUNOV  $U_1$  est conservative car elle donne un résultat pessimiste sur le domaine de stabilité du système.

## 1.4 Stabilité des systèmes linéaires

Si le système est linéaire :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad x \in \mathcal{R}^n \quad (1.2)$$

alors le système est globalement asymptotiquement stable (le point d'équilibre étant à l'origine) si toutes les valeurs propres de  $A$  sont strictement positive, soit :

$$Re(\lambda_i(A)) < 0 \quad i = 1, \dots, n$$

**Théorème 1.3 (Stabilité de LYAPUNOV des systèmes linéaires)** *Le système linéaire 1.2 est asymptotiquement stable (ou les valeurs propres de  $A$  sont à partie*

réelles négatives) **si et seulement si**, pour toute matrice symétrique définie positive  $Q$ , il existe une matrice  $P$  définie positive (symétrique) satisfaisant l'équation de LYAPUNOV

$$A^T P + P A + Q = 0 \quad (1.3)$$

Démonstration de la condition suffisante: considérons la fonction de LYAPUNOV candidate

$$U(x) = x^T P x$$

alors :

$$\begin{aligned} \dot{U}(x) &= x^T P \dot{x} + \dot{x}^T P x \\ &= x^T P A x + x^T A^T P x \\ &= x^T (P A + A^T P) x . \end{aligned}$$

Soit  $Q$  une matrice définie positive, si  $P$  est solution positive de 1.3 alors

$$U(x) > 0 \quad \forall x \neq 0 \quad \text{et}$$

$$\dot{U}(x) = -x^T Q x \Rightarrow \dot{U}(x) < 0 \quad \forall x \neq 0 .$$

Donc, d'après le théorème général, le système est asymptotiquement stable.

Démonstration de la condition nécessaire: pour un couple  $(A, Q)$  quelconque donné, l'équation 1.3 d'inconnue  $P$  peut ne pas admettre une solution unique. Mais si  $A$  est stable alors l'équation de LYAPUNOV admet une solution unique :

$$P = \int_0^{\infty} e^{A^T t} Q e^{A t} dt . \quad (1.4)$$

En effet :

$$\begin{aligned} A^T P + P A &= \int_0^{\infty} A^T e^{A^T t} Q e^{A t} dt + \int_0^{\infty} e^{A^T t} Q e^{A t} A dt \\ &= \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} (e^{A^T t} Q e^{A t}) dt \\ &= e^{A^T t} Q e^{A t} \Big|_0^{\infty} \\ &= -Q \end{aligned} \quad (1.5)$$

car  $e^{A t} \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \infty$  si  $A$  est stable.

Dans la chapitre suivant, pour démontrer les résultats de la commande LQ, on utilise une variante de la condition nécessaire de stabilité : soit  $A$  une matrice stable alors  $P$  solution de 1.3 est définie positive si  $Q$  est définie positive (évident d'après 1.4).

# Chapitre 2

## La commande LQ

### 2.1 Principe

Considérons un système linéaire :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) & x \in \mathcal{R}^n; u \in \mathcal{R}^m \\ z(t) = Nx(t) & z \in \mathcal{R}^q. \end{cases} \quad (2.1)$$

**Hypothèse :** la paire  $(A, B)$  est stabilisable, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de mode instable et ingouvernable dans le système.

**Résultats :** La commande par retour d'état qui stabilise le système et minimise le critère LQ :

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\infty (z^T(t)Qz(t) + u^T(t)Ru(t))dt \\ &= \int_0^\infty (x^T(t)Q_x x(t) + u^T(t)Ru(t))dt \end{aligned} \quad (2.2)$$

avec  $R > 0$ ,  $Q \geq 0$  ( $Q_x = N^T Q N$ ) s'écrit :

$$u(t) = -K_c x(t) \text{ avec } K_c = R^{-1} B^T P_c \quad (2.3)$$

et  $P_c$  solution positive (**symétrique**) de l'équation de RICCATI :

$$P_c A + A^T P_c - P_c B R^{-1} B^T P_c + Q_x = 0. \quad (2.4)$$

On a alors :  $J_{\min} = x_0^T P_c x_0$  ( $x_0$  : état initial à  $t = 0$ ).

**Démonstration :**<sup>1</sup> La dynamique du système en boucle fermée sur la loi de com-

1. Cette démonstration s'appuie sur le théorème de LYAPUNOV. Une démonstration plus générale utilise le principe du maximum (voir [4], par rapport à ce cadre plus général, le cas qui nous traitons ici est celui de la régulation à horizon libre des systèmes linéaires avec un critère quadratique).

mande  $u(t) = -Kx(t)$  obéit à l'équation :

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t). \quad (2.5)$$

La réponse autonome de  $x(t)$  s'écrit alors:  $x(t) = e^{A_f t}x_0$  avec  $A_f = A - BK$  et  $x_0 = x(t=0)$ .

Le critère  $J$  devient :

$$J = \int_0^\infty (x^T(t)Q_x x(t) + u^T(t)Ru(t))dt \quad (2.6)$$

$$= \int_0^\infty x^T(t)(Q_x + K^T RK)x(t)dt \quad (2.7)$$

$$= x_0^T \left( \int_0^\infty e^{A_f^T t} (Q_x + K^T RK) e^{A_f t} dt \right) x_0 \quad (2.8)$$

$$= x_0^T P x_0 \quad (2.9)$$

avec :

$$P = \int_0^\infty e^{A_f^T t} (Q_x + K^T RK) e^{A_f t} dt.$$

La contrainte  $A_f$  stable entraîne que  $P$  vérifie l'équation de LYAPUNOV (voir théorème 1.3) :

$$A_f^T P + P A_f + Q_x + K^T RK = 0 \quad (2.10)$$

Par ailleurs  $P \geq 0$  car  $J = x_0^T P x_0$  et  $J \geq 0 \quad \forall x_0$  (critère quadratique).

Soit  $K_c$  la valeur optimale de  $K$  qui minimise  $J$  et  $P_c$  la solution correspondante de l'équation de LYAPUNOV 2.10, soit :

$$(A - BK_c)^T P_c + P_c (A - BK_c) + Q_x + K_c^T R K_c = 0 \quad (2.11)$$

Considérons une variation  $\Delta_K$  autour de  $K_c$ ; soit  $K = K_c + \Delta_K$ , alors il en résulte une variation  $\Delta_P$  autour de  $P_c$ ; soit  $P = P_c + \Delta_P$  qui vérifie :

$$(A - B(K_c + \Delta_K))^T (P_c + \Delta_P) + (P_c + \Delta_P) (A - B(K_c + \Delta_K)) + \dots \quad (2.12)$$

$$\dots Q_x + (K_c + \Delta_K)^T R (K_c + \Delta_K) = 0$$

$K_c$  est la valeur optimale au sens du critère  $J$ , ssi le critère augmente pour toute variation  $\Delta_K$  autour de  $K_c$ ; soit :

$$\Delta_P > 0 \quad \forall \Delta_K \quad / \quad A - B(K_c + \Delta_K) \text{ stable}$$

(si  $\Delta_K$  est telle que  $A - B(K_c + \Delta_K)$  est instable, alors le critère devient infini). Si on retranche l'équation 2.11 de l'équation 2.12, nous obtenons :

$$(A - B(K_c + \Delta_K))^T \Delta_P - \Delta_K^T B^T P_c + \Delta_P (A - B(K_c + \Delta_K)) - P_c B \Delta_K + \dots$$

$$\dots \Delta_K^T R \Delta_K + \Delta_K^T R K_c + K_c^T R \Delta_K = 0$$

$$(A - BK)^T \Delta_P + \Delta_P (A - BK) + \dots \\ \dots \Delta_K^T (RK_c - B^T P_c) + (RK_c - B^T P_c)^T \Delta_K + \Delta_K^T R \Delta_K = 0$$

C'est une équation de LYAPUNOV.  $A - BK$  étant stable,  $\Delta_P$  est positif ssi (théorème de Lyapunov) :

$$\Delta_K^T (RK_c - B^T P_c) + (RK_c - B^T P_c)^T \Delta_K + \Delta_K^T R \Delta_K > 0 \quad \forall \Delta_K$$

or  $\Delta_K^T R \Delta_K > 0 \quad \forall \Delta_K$  car  $R > 0$ , il faut donc que :

$$RK_c - B^T P_c = 0 \text{ ,soit :}$$

$$K_c = R^{-1} B^T P_c . \quad (2.13)$$

Si on reporte cette équation dans l'équation 2.11, nous obtenons **l'équation de RICCATI de commande** :

$$P_c A + A^T P_c - P_c B R^{-1} B^T P_c + Q_x = 0. \quad (2.14)$$

Remarque : on peut retrouver directement l'équation de LYAPUNOV en boucle fermée 2.11 à partir de l'équation de RICCATI en boucle ouverte 2.14 et de 2.13. Il suffit de rajouter et de retrancher  $P_c B R^{-1} B^T P_c$  dans 2.14.

### Schéma de principe :

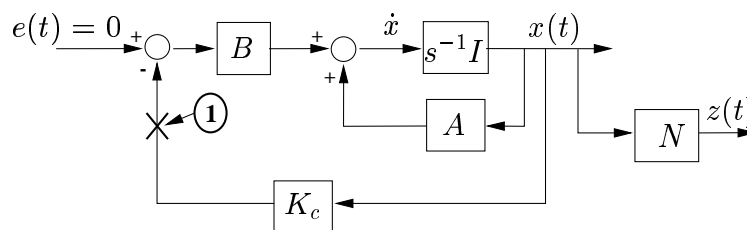


FIG. 2.1 – Schéma général de la commande linéaire quadratique.

Transfert du système:  $G_{zu}(s) = \frac{Z}{U}(s) = N(sI - A)^{-1}B$ .

Transfert de boucle:  $L_c(s) = K_c(sI - A)^{-1}B$ . (on coupe en (1))

Robustesse de la commande LQ. On démontre :

$$(I + L_c^T(-s))R(I + L_c(s)) = R + G_{zu}^T(-s)QG_{zu}(s) \quad (2.15)$$

Dans le cas monovariante (dim  $u = 1$ ), on obtient :

$$|1 + L_c(j\omega)| \geq 1 \quad \text{ou} \quad |S_u(j\omega)| \leq 1 \quad , \forall \omega .$$

La figure 2.2 illustre cette propriété dans le plan de Nyquist. Il en résulte les marges de stabilité :

$$\text{Marge de gain } [0.5; +\infty], \quad \text{Marge de phase } [-60^\circ; +60^\circ] \quad (2.16)$$

Cette propriété n'est plus vérifiée pour les synthèses LQ dont le critère tient compte de pondérations croisées état/commande :

$$J = \int_0^\infty (x^T Q_x x + 2x^T S u + u^T R u) dt .$$

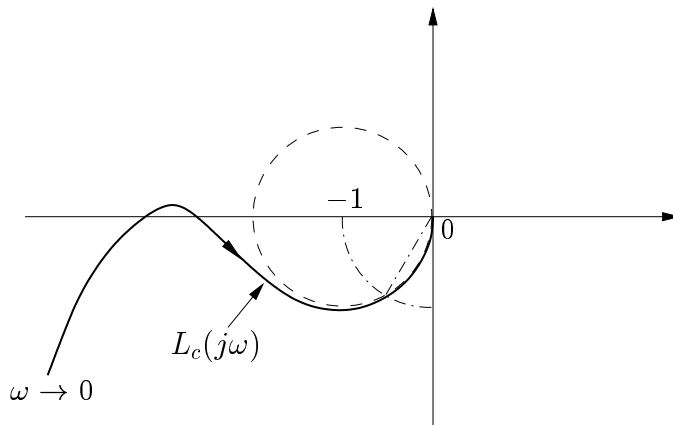


FIG. 2.2 – Lieu de NYQUIST de la fonction de transfert de boucle LQ.

## 2.2 Résolution de l'équation de RICCATI :

L'équation 2.14 s'écrit aussi<sup>2</sup> :

$$[P_c \quad -I_n] \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q_x & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ P_c \end{bmatrix} = 0 .$$

$H = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q_x & -A^T \end{bmatrix}$  est appelée la matrice hamiltonienne associée à l'équation de RICCATI 2.14.

**Propriété de  $H$  :** les  $2n$  valeurs propres de  $H$  sont :

– les  $n$  valeurs propres stables de la boucle fermée  $\text{spec}(A - BK_c)$ ,

2.  $I_n$  désigne la matrice identité de dimension  $n$ .



– les  $n$  valeurs propres opposées par rapport à l'axe imaginaire (donc instables).

**Démonstration :** Effectuons une transformation régulière sur  $H$  :

$$\widetilde{H} = M^{-1}HM \quad \text{avec} \quad M = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ P_c & I_n \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad M^{-1} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -P_c & I_n \end{bmatrix},$$

alors :

$$\begin{aligned} \widetilde{H} &= \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -P_c & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A - BR^{-1}B^T P_c & -BR^{-1}B^T \\ -Q_x - A^T P_c & -A^T \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A - BR^{-1}B^T P_c & -BR^{-1}B^T \\ -P_c A - A^T P_c - Q_x - P_c BR^{-1}B^T P_c & -A^T + P_c BR^{-1}B^T \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A - BK_c & -BR^{-1}B^T \\ 0 & -(A - BK_c)^T \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Donc :

$$\det(sI_{2n} - \widetilde{H}) = \det(sI_{2n} - H) = \det(sI_n - (A - BK_c)) \det(sI_n + (A - BK_c)^T)$$

**Résolution par les sous espaces invariants :** La démonstration précédente nous

montre que  $\begin{bmatrix} I_n \\ P_c \end{bmatrix}$  est la matrice des vecteurs (de longueur  $2n$ ) qui engendrent le sous espace invariant associé aux  $n$  valeurs propres stables de  $H$  ( $\text{spec}(A - BK_c)$ ). Soit  $\Lambda$  la matrice  $n \times n$  (diagonale ou non) des  $n$  valeurs propres stables et soit  $X$  la matrice des vecteurs propres de  $H$  associés à  $\Lambda$  calculés par exemple par une décomposition spectrale ou une décomposition de SCHUR de  $H$  :

$$HX = X\Lambda,$$

si l'on partitionne  $X$  en deux sous-matrices  $n \times n$   $X_1$  et  $X_2$  :

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix},$$

alors on peut écrire :

$$\begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q_x & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ X_2 X_1^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n \\ X_2 X_1^{-1} \end{bmatrix} X_1 \Lambda X_1^{-1}$$

et donc

$$P_c = X_2 X_1^{-1}.$$

$P_c$  est unique car il n'existe qu'un seul ensemble de  $n$  valeurs propres stables de  $H$ .

## 2.3 Propriétés asymptotiques

Le critère LQ peut être qualitativement perçu comme un compromis entre performance (décrite par la pondération sur  $z$ ) et consommation (décrite par la pondération sur  $u$ ). Que ce passe t'il pour les réglages extrêmes de ce compromis?

**Théorème 2.1 (Théorème général)** *Considérons un système linéaire :*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) & x \in \mathcal{R}^n; u \in \mathcal{R}^m \\ z(t) = Nx(t) & z \in \mathcal{R}^q. \end{cases} \quad (2.17)$$

*La commande par retour d'état qui minimise le critère LQ :*

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\infty (z^T(t)z(t) + \rho u^T(t)u(t))dt \\ &= \int_0^\infty (x^T N^T N(t)x(t) + \rho u^T(t)u(t))dt \end{aligned} \quad (2.18)$$

avec  $\rho$  scalaire positif, s'écrit<sup>3</sup> :

$$u(t) = -K_c x(t) \text{ avec } K_c = \frac{1}{\rho} B^T P_c \text{ et } P_c = \text{Ric} \begin{bmatrix} A & -\frac{1}{\rho} B B^T \\ -N^T N & -A^T \end{bmatrix}. \quad (2.21)$$

Nous avons alors :

- $\lim_{\rho \rightarrow 0} (P_c) = P_0$  existe et  $\lim_{\rho \rightarrow 0} (J) = x^T(0)P_0x(0)$
- enfin, si les hypothèses suivantes sont vérifiées :
  - \*  $\dim(z) \leq \dim(u)$  ( $q \leq m$ ),
  - \* le transfert  $Z/U(s) = N(sI_n - A)^{-1}B$  n'a pas de zéros dans le demi-plan droit,

$$\text{alors } P_0 = 0.$$

La dernière hypothèse illustre le fait que, dans le cas de système à déphasage non minimal (c'est-à-dire avec des zéros "instables"), on ne peut pas "pousser" indéfiniment les performances même si l'on s'autorise des commandes sans aucune limitation;

<sup>3</sup>. Pour rappel,  $X = \text{Ric}[H]$  désigne la solution symétrique définie positive de l'équation de RICCATI :

$$XA + A^T X - X R_x X + Q_x = 0 \quad (2.19)$$

associée à la matrice hamiltonienne :

$$H = \begin{bmatrix} A & -R_x \\ -Q_x & -A^T \end{bmatrix}. \quad (2.20)$$

ceci est tout à fait logique puisque les zéros (du système comme du correcteur) attirent les pôles en boucle fermée quand le gain de boucle augmente (où lorsque la pondération sur  $u$  diminue dans le critère LQ).

Pour analyser qualitativement les propriétés asymptotiques de la commande LQ, on peut utiliser un outil graphique: le **Root square locus**.

**Root square locus:** C'est le lieu des valeurs propres de la matrice hamiltonienne  $H$  lorsque  $\rho$  varie de 0 à l'infini. La partie stable de ce lieu montre l'évolution selon  $\rho$  de la dynamique en boucle fermée.

$$H = \begin{bmatrix} A & -\frac{1}{\rho}BB^T \\ -N^TN & -A^T \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

$$= \begin{bmatrix} A & 0 \\ -N^TN & -A^T \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\rho} \begin{bmatrix} 0 & B^T \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

$$= \mathcal{A} - \mathcal{B}k\mathcal{C} \quad (2.25)$$

Le *root square locus* correspond donc au lieu des racines du système fictif:

$$\mathcal{S} = \left[ \begin{array}{c|c} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \hline \mathcal{C} & 0 \end{array} \right] \quad (2.26)$$

pour un gain de boucle  $k = 1/\rho$  variant de l' $\infty$  à 0.

$$\text{Notons: } G_{zu}(s) = \frac{Z}{U}(s) = N(sI - A)^{-1}B (= G_e \frac{\prod_0^{n_z}(s - z_i)}{\prod_0^n(s - p_i)} \text{ en monovariable}). \quad (2.27)$$

Règles de construction du lieu: dans le cas monovariable, ce sont les règles classiques appliquées au système  $\mathcal{S}$  compte tenu des remarques suivantes

– d'après la propriété de  $H$ :

$$\det(\lambda I - H) = \det(\lambda I - (A - BK_c)) \det(\lambda I + A^T - K_c^T B^T) \quad (2.28)$$

ce lieu des racines est symétrique par rapport à l'axe imaginaire  $\Rightarrow$  le signe du gain d'Évans est celui pour lequel l'axe imaginaire ne fait pas partie du lieu,

- les  $2n$  pôles en boucle ouverte de  $\mathcal{S}$  sont les  $n$  pôles de  $G_{zu}(s)$  complétés par leurs opposés,
- les zéros de  $\mathcal{S}$  sont les zéros de  $G_{zu}(s)$  complétés par leurs opposés.

Dans le cas multi-variable, on ne peut plus parler du signe du gain d'Évans (c'est une matrice de gains) mais la propriété de symétrie par rapport à l'axe imaginaire est toujours vérifiée et on peut affirmer que le lieu direct (celui qui nous intéresse) est celui qui ne contient pas l'axe imaginaire et le lieu complémentaire est celui qui

contient l'axe imaginaire. Enfin, la partie du lieu qui nous intéresse pour analyser la dynamique en boucle fermée est celle du demi-plan gauche car la commande LQG est **toujours stabilisante**.

Ces règles de symétrie conduisent aux conclusions suivantes.

**Lorsque  $\rho \rightarrow \infty$  :** (commande à énergie minimale)

- les valeurs propres stables de  $A$  ne sont pas modifiées par la commande LQ.  
Si le système est stable en boucle ouverte alors  $K_c = 0$ ,
- les valeurs propres instables de  $A$  sont placées en boucle fermée sur leurs images stables  $\rightarrow K_c \neq 0$ .

**Lorsque  $\rho \rightarrow 0$  :**(aucune limitation sur la commande) soit  $n_z f$  le nombre de zéros dans le transfert  $G_{zu}(s) = Z/U(s)$ , alors :

- $q$  valeurs propres de la boucle fermée sont placées sur les zéros stables de  $G_{zu}(s)$  et sur les images stables des zéros instables de  $G_{zu}(s)$ ,
- les  $n - q$  valeurs propres restantes sont rejetées à l'infini dans le demi plan gauche,
- $P_c = 0$  si  $G_{zu}(s)$  est à déphasage minimal (pas de zéros instables),

**Exemple monovarié :** Considérons le système :

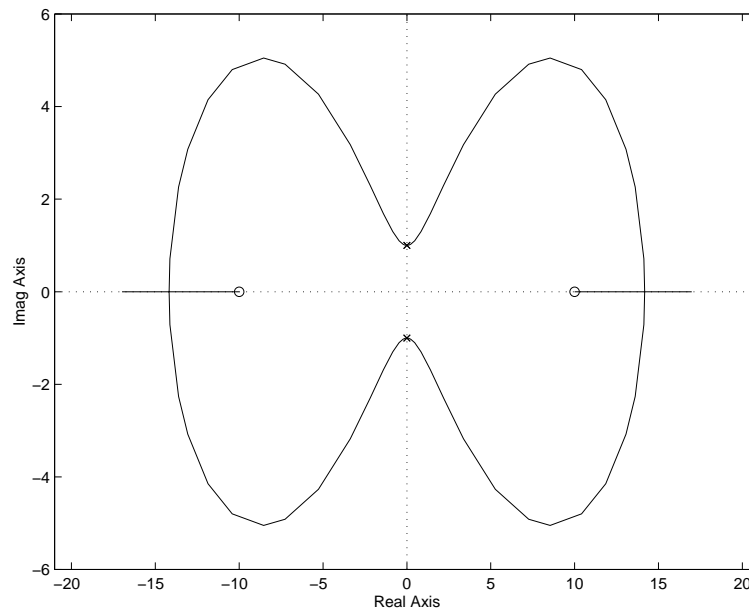
$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ z = \begin{bmatrix} 1 & -0.1 \end{bmatrix} x \end{cases} \quad (2.29)$$

et le critère :

$$J = \int_0^{\infty} [z^2(t) + \rho u^2(t)] dt \quad \text{avec} \quad \rho > 0.$$

La session Matlab suivante permet de tracer le *root square locus* associé à ce problème (voir figure 2.3).

```
>> a=[0 1;-1 0];b=[0;1];n=[1 -0.1];
>> At=[a 0*a;-n'*n -a'];Bt=[b;0*b];Ct=[0*b' b'];
>> rlocus(At,Bt,Ct,0)
```

FIG. 2.3 – *Root square locus sur un exemple monovariable.*

**Exemple multi-variable :** Considérons le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u \\ z = \begin{bmatrix} 1 & -0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.2 \end{bmatrix} x(t) \end{cases} \quad (2.30)$$

et le critère :

$$J = \int_0^{\infty} [z^T z + \rho u^T u] dt \quad \text{avec} \quad \rho > 0.$$

À titre d'exercice on développera une fonction `rsqlocus` permettant de tracer le *root square locus* dans le cas général (la fonction `rlocus` n'accepte que des systèmes monovariabiles). La syntaxe d'appel sera la même que celle de la fonction `lqr`. On obtient alors la session suivante et la figure 2.4.

```
>> a=[0 1 0 0;-1 0 0 0;1 0 0 1;0 0 0 0];
>> b=[0 0;1 0;0 0;0 1];n=[1 -0.1 0 0;0 0 1 0.2];
>> rsqlocus(a,b,n'*n,eye(2,2));
```

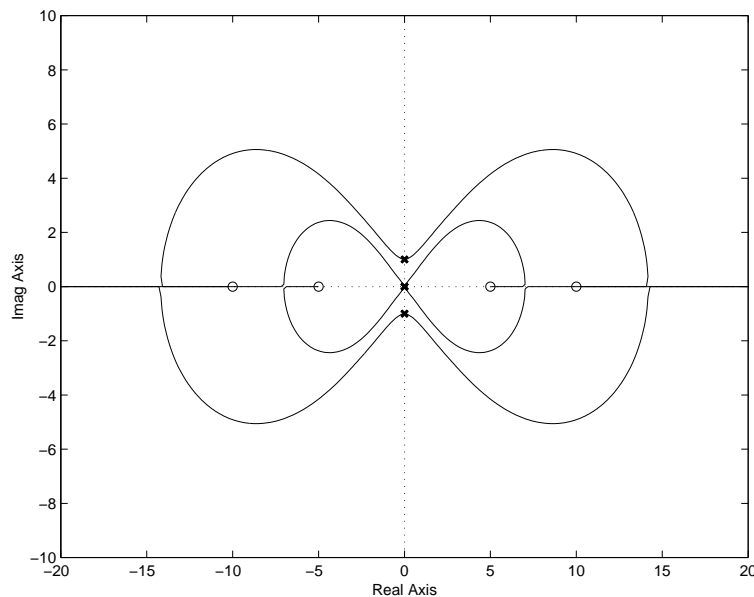


FIG. 2.4 – Root square locus sur un exemple multi-variable.

## 2.4 Exercices ...

### 2.4.1 ... sur la double intégration

Considérons le système :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e(t) \\ z(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} x(t) \end{cases} \quad (2.31)$$

Nous recherchons le régulateur ( $e(t) = 0$ ) qui minimise le critère

$$J = \int_0^{\infty} [z^2(t) + \rho u^2(t)] dt \quad \text{avec} \quad \rho = r^2 > 0.$$

- Calculer le retour d'état  $K_c$  sans résoudre l'équation de Riccati,
- tracer l'évolution de la dynamique en boucle fermée lorsque  $\rho$  varie de 0 à  $\infty$ ,
- quelle valeur de  $\rho$  permet d'avoir en boucle fermée un système du second ordre amorti à 1?. Valeur de la pulsation correspondante? Lieu de Black correspondant?
- quel est le transfert  $Z/E(s)$  en boucle fermée?
- Calculer  $P_c$  la solution de l'équation de Riccati en fonction de  $\rho$  et  $\lim_{\rho \rightarrow 0}(P_c)$ .

### 2.4.2 ... sur le “root square locus”

On considère le système du second ordre :

$$G(s) = \frac{Y}{U}(s) = \frac{s + 3}{(s + 2)(s - 1)}$$

Tracer qualitativement le “root square locus” associé au critère LQ :

$$J = \int_0^{\infty} (y^2 + \rho u^2) dt.$$

Peut-on rendre les valeurs propres du système en boucle fermée arbitrairement rapides en jouant sur  $\rho$ ?

PAGE SANS TEXTE



# Chapitre 3

## La commande LQG

### 3.1 Principe général

Considérons le système linéaire d'ordre  $n$  suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Mw \\ y = Cx + Du + v \\ z = Nx \end{cases} \quad (3.1)$$

où  $w$  et  $v$  représentent des bruits blancs, de moyenne nulle, indépendants, avec respectivement pour matrice de covariance  $W$  et  $V$ .

$$\begin{aligned} E[w(t)w(t+\tau)^T] &= W\delta(\tau) & E[v(t)v(t+\tau)^T] &= V\delta(\tau) & E[w(t)v(t+\tau)^T] &= 0. \\ & \text{avec } W \geq 0 & \text{et } V > 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

On note aussi  $W_x = MWM^T$  la matrice de covariance du bruit d'état.

A partir du vecteur  $y$  de mesures bruitées (retour de sortie), nous recherchons une loi de commande qui minimise le critère

$$J = \lim_{T \rightarrow \infty} E \left[ \int_0^T (z^T Q z + u^T R u) dt \right] \quad (3.3)$$

où  $z = Nx$  désigne le vecteur à réguler et  $Q$  et  $R$  deux matrices de pondération avec, comme précédemment,

$$Q = Q^T \geq 0 \quad \text{et} \quad R = R^T > 0.$$

La solution de ce problème s'appuie sur le **principe de séparation** qui établit que la commande optimale est obtenue

- a) en recherchant l'estimé optimal  $\hat{x}$  (au sens de la variance d'erreur minimale) de l'état  $x$  par la méthode du Filtre de KALMAN, c'est-à-dire on estime l'état

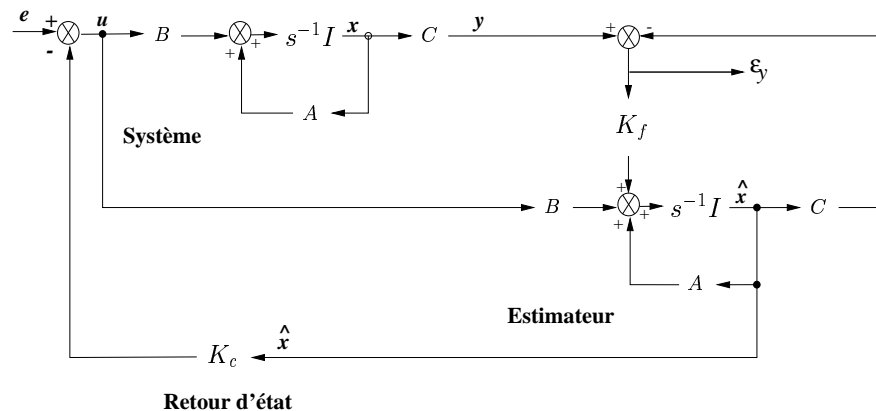


FIG. 3.1 – La structure du correcteur LQG (la transmission directe  $D$  n'est pas représentée pour des raisons de clarté).

$x$  par l'équation classique du filtre de KALMAN à condition que le triplet  $(A, MW^{1/2}, C)$  soit détectable et stabilisable.

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K_f(y - C\hat{x} - Du)$$

avec  $K_f = P_f C^T V^{-1}$  où  $P_f$  obéit à l'équation de RICCATI suivante :

$$P_f A^T + A P_f - P_f C^T V^{-1} C P_f + M W M^T = 0 \quad (3.4)$$

avec  $P_f = P_f^T > 0$ .

- b) en employant cet estimé comme s'il était la mesure exacte du vecteur d'état, pour résoudre le problème de commande optimale linéaire déterministe (méthode LQ) ; soit (si  $(A, B, Q^{1/2}N)$  est détectable et stabilisable) :

$$u = -K_c \hat{x}$$

avec

$$\begin{cases} K_c = R^{-1} B^T P_c \\ P_c A + A^T P_c - P_c B R^{-1} B^T P_c + N^T Q N = 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

La figure 3.1 représente la structure du correcteur LQG dans le boucle de régulation.

La représentation d'état du correcteur LQG s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK_c - K_f C + K_f D K_c & K_f \\ -K_c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ y \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

## 3.2 Propriétés

On peut montrer que la représentation d'état du transfert en boucle fermée entre  $e$  et  $\varepsilon_y$  (voir figure 3.1) s'écrit

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\varepsilon}_x \\ \varepsilon_y \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{cc|c} A - BK_c & BK_c & B \\ 0 & A - K_f C & 0 \\ \hline 0 & C & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x \\ \varepsilon_x \\ e \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

ou  $\varepsilon_x = x - \hat{x}$  désigne l'erreur d'estimation de l'état.

A partir de cette représentation, le **principe de séparation** apparaît clairement et peut être formulé de la façon suivante :

- les valeurs propres de la boucle fermée peuvent être séparées selon les  $n$  valeurs propres du retour d'état ( $\text{spec}(A - BK_c)$ ) et les  $n$  valeurs propres du filtre d'estimation ( $\text{spec}(A - K_f C)$ ),
- les  $n$  valeurs propres du filtre d'estimation sont ingouvernables par  $e$ ,
- les  $n$  valeurs propres du retour d'état sont inobservables par  $\varepsilon_y$ .

Le transfert de  $e$  vers  $\varepsilon_y$  est donc toujours nul.

## 3.3 Synthèse LQG/LTR (Loop Transfer Recovery)

L'objectif de la procédure de réglage LTR est de restaurer les marges de stabilité "idéale" du retour d'état de la commande LQ (ou duale du filtre de KALMAN).

**Hypothèses d'application :** le système strictement propre défini par la représentation  $(A, B, C$  et  $D)$  vérifie :

- $D = 0$  (strictement propre),
- $C(sI - A)^{-1}B$  à minimum de phase (pas de zéros instables),
- nombre égal d'entrées et de sorties.

**Recouvrement en entrée :** La procédure de synthèse LQG/LTR consiste à :

a) Synthétiser, dans une première étape, le correcteur LQ par un choix approprié des pondérations  $Q_x$  et  $R$  obéissant aux exigences du cahier des charges. Les aspects de cette première synthèse concernent le comportement basse fréquence des valeurs singulières du transfert  $-K_c(sI - A)^{-1}B$ , les fréquences de coupures correspondantes, l'affaiblissement haute fréquence, etc ...

b) Dans une seconde étape, à partir d'un réglage nominal  $W_{x0}$  et  $V_0$  du filtre de KALMAN, on augmentera le paramètre  $q$  du nouveau réglage :

$$W_x = W_{x0} + qBB^T, \quad V = V_0$$

jusqu'à ce que le transfert de boucle  $K(s)G(s)$  du correcteur LQG recouvre, sur une bande de fréquence suffisamment large, le transfert de boucle de retour d'état LQ :

$$\lim_{q \rightarrow \infty} K(s)G(s) = -K_c(sI - A)^{-1}B .$$

### Recouvrement en sortie :

a) Synthétiser le filtre de KALMAN en manipulant les covariances  $W_x$  et  $V$  afin que le transfert  $-C(sI - A)^{-1}K_f$  soit satisfaisant à la sortie du système.

b) Dans une seconde étape, à partir d'un réglage nominal  $Q_{x_0}$  et  $R_0$  du retour d'état LQ, on augmentera le paramètre  $q$  du nouveau réglage :

$$Q_x = Q_{x_0} + qC^T C, \quad R = R_0$$

jusqu'à ce que le transfert de boucle  $G(s)K(s)$  du correcteur LQG recouvre, sur une bande de fréquence suffisamment large, le transfert de boucle du filtre de KALMAN :

$$\lim_{q \rightarrow \infty} G(s)K(s) = -C(sI - A)^{-1}K_f .$$

La figure 3.2 visualise l'effet du paramètre  $q$  (noté  $\alpha$  sur la figure) sur le lieu de black du gain de boucle  $K(s)G(s)$  (recouvrement en entrée).

## 3.4 Synthèse LQG discrète

On considère le système linéaire discret :

$$\begin{cases} x_{n+1} = Ax_n + Bu_n + Mw_n \\ y_n = Cx_n + Du_n + v_n \\ z_n = Nx_n \end{cases}$$

où les bruits  $w_n$  et  $v_n$  sont des processus stationnaires de moyenne nulle, pseudo-blancs et de matrice de covariance  $W \geq 0$  et  $V > 0$  :

$$E[w_k v_l^T] = W\delta_{k-l}, \quad E[v_k v_l^T] = V\delta_{k-l}, \quad E[w_k v_l^T] = 0 . \quad (3.8)$$

Nous cherchons une loi de commande par retour de sortie qui minimise le critère :

$$J = \lim_{N \rightarrow \infty} E \left[ \sum_{n=1}^N z_n^T Q z_n + \sum_{n=0}^{N-1} u_n^T R u_n \right] \quad Q \geq 0 \quad \text{et} \quad R > 0, \quad (3.9)$$

donc un problème de régulation à horizon libre (comme dans le cas continu). La solution s'appuie également sur le **principe de séparation**, c'est-à-dire un filtre de KALMAN et un retour d'état estimé ou prédit.

### 3.4.1 Filtre de KALMAN discret (régime permanent)

En discret, on distingue :

- l'état estimé  $\hat{x}_{n/n}$  à l'instant  $n$  compte tenu de la mesure  $y_n$  et la variance de l'erreur d'estimation associée :

$$P_e = E[(\hat{x}_{n/n} - x_n)(\hat{x}_{n/n} - x_n)^T] \quad \text{matrice symétrique } n \times n,$$

- l'état prédit  $\hat{x}_{n/n-1}$  à l'instant  $n$  juste avant la mesure  $y_n$  et la variance de l'erreur de prédiction associée :

$$P_f = E[(\hat{x}_{n/n-1} - x_n)(\hat{x}_{n/n-1} - x_n)^T] \quad \text{matrice symétrique } n \times n,$$

Les équations du filtre de KALMAN en **régime permanent** s'écrivent alors :

$$\hat{x}_{n+1/n} = A\hat{x}_{n/n-1} + Bu_n + K_f(y_n - C\hat{x}_{n/n-1} - Du_n) \quad (3.10)$$

$$\hat{x}_{n/n} = \hat{x}_{n/n-1} + K_e(y_n - C\hat{x}_{n/n-1} - Du_n) \quad \text{soit encore :}$$

$$\hat{x}_{n/n} = (I - K_e C)\hat{x}_{n/n-1} - K_e Du_n + K_e y_n \quad (3.11)$$

avec :

$$K_f = AK_e \quad \text{gain de prédiction,} \quad (3.12)$$

$$K_e = P_f C^T (C P_f C^T + V)^{-1} \quad \text{gain d'estimation,} \quad (3.13)$$

avec  $P_f$  solution de l'équation de RICCATI discrète :

$$P_f = AP_f A^T - AP_f C^T (C P_f C^T + V)^{-1} C P_f A^T + M W M^T \quad (3.14)$$

On a alors :

$$P_e = (I - K_e C) P_f \quad (3.15)$$

**Remarque :** en présence de bruits corrélés entre l'équation d'état et de mesure :

$$E[w_k v_l^T] = T \delta_{k-l}$$

les équations 3.10, 3.11, 3.13 et 3.15 sont inchangés et les équation 3.12 et 3.14 deviennent respectivement :

$$K_f = AK_e + K_{pc} \quad \text{avec} \quad K_{pc} = T(C P_f C^T + V)^{-1} \quad \text{gain de "pré-di-correction",}$$

$$P_f = F P_f F^T - F P_f C^T (C P_f C^T + V)^{-1} C P_f F^T + M W M^T - T V^{-1} T^T \quad \text{avec} \quad F = A - T V^{-1} C .$$

### 3.4.2 Retour d'état optimal en discret

Le gain de retour d'état s'écrit :

$$\begin{cases} K_c = (R + B^T P_c B)^{-1} B^T P_c A \\ \text{avec } P_c = A^T P_c A - A^T P_c B (R + B^T P_c B)^{-1} B^T P_c A + N^T Q N \end{cases} \quad (3.16)$$

On retrouve une dualité parfaite entre ces équations et les équations de prédictions 3.12 à 3.14. Par rapport au cas continu, on peut distinguer deux formes d'implantation du correcteur LQG discret : la forme prédicteur et la forme estimateur.

### 3.4.3 Forme "prédicteur"

On retourne les états prédits dans le gain  $K_c$  :

$$u_n = -K_c \hat{x}_{n/n-1},$$

c'est-à-dire que pour calculer et appliquer la commande à l'instant  $n$  on ne connaît pas  $y_n$ . La représentation d'état du correcteur s'écrit alors :

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_{n+1/n} \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK_c - K_f C + K_f D K_c & K_f \\ -K_c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_{n/n-1} \\ y_n \end{bmatrix}. \quad (3.17)$$

Cette représentation est analogue à celle obtenue dans le cas continu.

### 3.4.4 Forme "estimateur"

Cette forme est plus usuelle. On retourne les états estimés :

$$u_n = -K_c \hat{x}_{n/n},$$

c'est-à-dire que l'on connaît  $y_n$  au moment de calculer et d'appliquer la commande. En l'absence de transmission direct  $D$  (qui alourdi considérablement les notations), la représentation d'état du correcteur s'écrit alors :

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_{n+1/n} \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A - BK_c)(I - K_e C) & (A - BK_c)K_e \\ -K_c(I - K_e C) & -K_c K_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_{n/n-1} \\ y_n \end{bmatrix}. \quad (3.18)$$

Par rapport à la forme précédente, on constate que ce correcteur présente une transmission directe entre  $y_n$  et  $u_n$ . Mais dans les deux cas, le principe de séparation est vérifié : les  $2n$  valeurs propres de la boucle fermée sont :

- les  $n$  valeurs propres du retour d'état ( $\text{spec}(A - BK_c)$ ) qui sont inobservables par l'innovation  $\varepsilon_y = y_n - (C\hat{x}_{n/n-1} + Du_n)$ .
- les  $n$  valeurs propres du filtre d'estimation ( $\text{spec}(A - K_f C) = \text{spec}(A(I - K_e C))$ ) qui sont ingouvernables par  $e_n$  (le signal de consigne sur  $u_n$ ),

Les deux correcteurs 3.17 et 3.18, bien qu'ils soient différents, donnent les  $2n$  même valeurs propres en boucle fermée. Ceci est illustré par l'exercice 3.5.3. Enfin, dans les deux formes, l'état du correcteur correspond à l'état prédit et non estimé.

**Remarque** En régime permanent, on peut donc implanter le correcteur LQG discret par sa représentation d'état. Dans le cas non stationnaire ou en réponse transitoire à la condition initiale :

$$\hat{x}_{0/0} \quad \text{et} \quad P_{\epsilon_0}, \quad (3.19)$$

les équations d'implantation de la commande sont celles du filtre de KALMAN discret non stationnaire :

$$\begin{cases} \hat{x}_{n+1/n} &= A\hat{x}_{n/n} + Bu_n & \text{Prédiction} \\ \hat{x}_{n+1/n+1} &= \hat{x}_{n+1/n} + K_{en+1}(y_{n+1} - C\hat{x}_{n+1/n}) & \text{Correction} \\ u_{n+1} &= -K_{cn+1}\hat{x}_{n+1/n+1} \quad (\text{ou} \quad -K_{cn+1}\hat{x}_{n+1/n}) & \text{Commande} . \end{cases} \quad (3.20)$$

avec les équations de propagation des covariances et du gain qui sont indépendantes de  $y_n$  et peuvent donc être intégrées hors ligne :

$$\begin{cases} K_{en} &= P_{f_n} C^T (C P_{f_n} C^T + V)^{-1} \\ P_{f_{n+1}} &= A P_{en} A^T + M W M^T \\ P_{en} &= (I - K_{en} C) P_{f_n} . \end{cases} \quad (3.21)$$

## 3.5 Exercices

### 3.5.1 Système du premier ordre

On considère le système du premier ordre :

$$\frac{Y}{U}(s) = G(s) = \frac{s}{1-s} \quad (3.22)$$

- donner une représentation d'état  $(A, B, C, D)$  du système et calculer le retour d'état  $K_c$  solution du problème LQ à énergie minimale,
- calculer le gain de Kalman  $K_f$  en fonction de  $\rho$ : la variance du bruit d'état ( $E[w(t)w(t)^T] = \rho\delta(t)$ ) ; le variance du bruit de mesure étant unitaire ( $E[v(t)v(t)^T] = 1$ ).
- calculer la fonction de transfert du correcteur en fonction de  $\rho$ . Quelle est la particularité de ce correcteur? Que devient la fonction de transfert du correcteur lorsque  $\rho$  tends vers l'infini?. On notera  $K_{LTR}$  ce correcteur.
- tracer les lieux de NYQUIST de  $K_c(sI - A)^{-1}B$  et  $K_{LTR}G(s)$ . Conclusions sur les propriétés de recouvrement?.

### 3.5.2 Système du second ordre

On reprend ici l'exercice sur la commande LQ (voir section 2.4.1) que l'on complète par la prise en compte de l'équation de mesure et des bruits sur le système ; soit :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w(t) \quad (3.23)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + v(t) \quad (3.24)$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} x(t) \quad (3.25)$$

où  $w(t)$  et  $v(t)$  désignent deux bruits blancs indépendants, de moyenne nulle et de variance

$$E[ww^T] = \alpha^2, \quad E[vv^T] = 1.$$

- synthétiser le régulateur minimisant le critère :

$$J = \lim_{T \rightarrow \infty} E \left[ \int_0^T [z^2(t) + r^2 u^2(t)] dt \right] \quad (3.26)$$

- faire le schéma fonctionnel de la boucle fermée (système + régulateur),
- démontrer la propriété LTR :

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} K(s)G(s) = -K_c(sI - A)^{-1}B. \quad (3.27)$$

- sous Matlab, vérifier cette propriété sur le lieu de Black (dans le cas  $r = 1/2$ ).

### 3.5.3 LQG discret

On considère le modèle discret suivant (il s'agit d'un intégrateur) :

$$\begin{cases} x_{n+1} &= x_n + u_n + w_n \\ y_n &= x_n + v_n \end{cases}$$

où  $w_n$  et  $v_n$  sont des bruits d'état et de mesure normalisés (centrés, indépendants et de variance unitaire). On souhaite calculer la commande LQG qui minimise le critère :

$$J = \lim_{N \rightarrow \infty} E \left[ \sum_{n=1}^N x_n^2 + \sum_{n=0}^{N-1} u_n^2 \right]$$

Calculer les formes "prédicteur" et "estimateur" correspondantes à ce problème. Tracer et commenter les diagrammes de BODE des deux correcteurs.



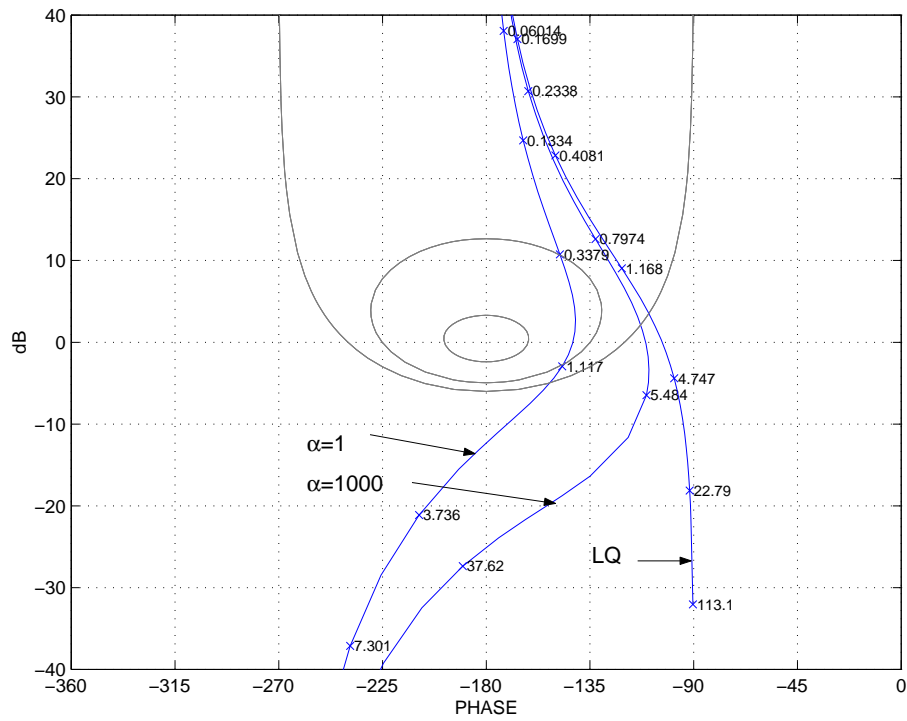


FIG. 3.2 – Lieux de Black relatifs aux exercices des sections 2.4.1 et 3.5.2.

PAGE SANS TEXTE



## 4.2 Calcul des paramètres

Considérons maintenant un système d'ordre  $n$  que nous supposons sans perte de généralité strictement propre :

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx \end{cases}, \quad (4.1)$$

et un correcteur d'ordre  $n$  :

$$\begin{cases} \dot{x}_K &= A_K x_K + B_K y \\ u &= C_K x_K + D_K y \end{cases}. \quad (4.2)$$

**Problème :** trouver les 3 paramètres  $K_c$ ,  $K_f$  et  $Q$  (statique car le système et le correcteur ont le même ordre) tels que le correcteur LQG équivalent défini par les équations :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu + K_f(y - C\hat{x}) \\ u &= -K_c\hat{x} + Q(y - C\hat{x}) \end{cases} \quad (4.3)$$

soit équivalent au correcteur 4.2 du point de vue du comportement entrée/sortie.

**Solution :** elle consiste à calculer la matrice de passage  $T$  entre les deux représentations 4.2 et 4.3 :

$$x_K = T\hat{x}. \quad (4.4)$$

On peut montrer que  $T$  est solution de l'équation de RICCATI (GNARE) :

$$[-T \quad I] \begin{bmatrix} A + BD_K C & BC_K \\ B_K C & A_K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ T \end{bmatrix} = 0 \quad (4.5)$$

dont la matrice hamiltonienne est la matrice dynamique en boucle fermée  $A_{cl}$ . Cette équation peut alors être résolue par la recherche d'un sous espace invariant associé à un ensemble de  $n$  valeurs propres ; c'est-à-dire :

- rechercher un sous-espace invariant ( $\mathcal{S} = \text{Im}(U)$ ) de dimension  $n$  de la matrice  $A_{cl}$ , soit :

$$A_{cl}U = U\Lambda. \quad (4.6)$$

Ce sous-espace est associé à un ensemble de  $n$  valeurs propres,  $\text{spec}(\Lambda)$ , parmi les  $2n$  valeurs propres de  $A_{cl}$ .

- partitionner les vecteurs  $U$  qui engendrent ce sous-espace de la façon suivante :

$$U = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}, \quad U_1 \in \mathcal{R}^n. \quad (4.7)$$

- calculer la solution :  $T = U_2 U_1^{-1}$ .

Les 3 paramètres sont alors calculés par les relations suivante :

- $Q = D_K$ ,
- $K_c = -C_K T - D_K C$ ,
- $K_f = T^{-1} B_K - B D_K$ .

**Remarques :**

- cette technique peut-être généralisée aux cas des correcteurs d'ordre supérieur ou même inférieur à l'ordre du modèle. Le lecteur se reportera au chapitre 9 de la référence [1] pour plus de détails,
- la résolution de l'équation de RICCATI 4.5 fait apparaître une combinatoire de solutions selon le choix des  $n$  valeurs propres parmi les  $2n$  valeurs propres de  $A_{cl}$  dans le calcul du sous-espace invariant. Cette combinatoire de solutions peut-être réduite selon les considérations suivantes :
  - choisir une ensemble de  $n$  valeurs propres auto-conjugées pour trouver une paramétrisation réelle,
  - les  $n$  valeurs propres choisies, associées au sous-espace invariant pour le résolution de 4.5, correspondent à la dynamique de commande ( $\text{spec}(A - BK_c)$ ),
  - une valeur propre ingouvernable dans le système doit donc être toujours sélectionnée dans ce choix,
  - une valeur propre inobservable dans le système ne doit jamais être sélectionnée dans ce choix,
  - enfin, on choisit couramment la dynamique d'estimation ( $\text{spec}(A - K_f C)$ ) plus rapide que la dynamique de commande ( $\text{spec}(A - BK_c)$ ).

### 4.3 Intérêts pratiques

Le principal intérêt de la structure LQG réside dans le fait que les variables d'état du correcteur ont un sens physique évident puisque ce sont les estimés des états du système commandé, alors que les états d'un correcteur issu d'une synthèse  $H_\infty$  ou d'une  $\mu$ -synthèse n'ont pas de signification immédiate. Si les variables d'état du modèle sur lequel est développée la forme LQG équivalente ont des unités physiques, alors il est possible de donner une unité physique à tous les gains qui définissent le correcteur. D'où l'intérêt de cette technique du point de vue de l'implantation des correcteurs :

- une fois le correcteur synthétisé par une technique quelconque, son passage sous la forme LQG permettra de visualiser en ligne ou hors ligne une estimation des états du système (voir section 4.4). De même, l'initialisation des états du correcteur, au démarrage de l'asservissement ou lors des commutations de lois de commande, s'appuiera sur les états physiques du système pris en

compte dans la modélisation. Toujours pour des raisons d'interprétation physique des états du correcteur, cette structure offre également des alternatives intéressantes sur la façon d'injecter les consignes dans la boucle,

- la structure LQG faisant apparaître le modèle du système, il sera également plus aisé d'adapter le correcteur au point de fonctionnement par la simple adaptation du modèle supposé connu. On peut également envisager la prise en compte de non-linéarités du système si elles sont modélisées (saturation d'actionneur, par exemple),
- enfin, une fois le modèle du système donné, le correcteur LQG est entièrement défini par les matrices de gains statiques d'estimation et de retour d'état. Les éventuelles interpolations de correcteurs entre deux points de fonctionnement seront également allégées si l'on considère cette paire de gains statiques au lieu des quatre matrices de la représentation d'état du correcteur.

## 4.4 Illustration

À titre d'exemple, nous avons représenté figures 4.2 et 4.3 les réponses en boucle fermée des états du système et du correcteur relatifs à l'exercice suivant (section 4.5) :

- lorsque ce correcteur est implanté sous forme compagne horizontale canonique (figure 4.2),
- lorsque ce correcteur est implanté sous forme LQG équivalente (figure 4.3).

Il s'agit des réponses à des conditions initiales sur le système (+1 sur  $y$ ,  $-1$  sur  $\dot{y}$  et 0 sur les états du correcteur). Nous pouvons constater que :

- les réponses des états du système sont les mêmes étant donné que le loi de commande est la même du point de vue de la relation entrée/sortie,
- par contre, les deux états du correcteur sous forme LQG ( $\hat{x}$ ) permettent maintenant d'estimer les deux états du système de façon tout à fait satisfaisante. Ces simulations permettent de plus d'apprécier la dynamique d'estimation (la durée du transitoire de recalage est de 3 s)

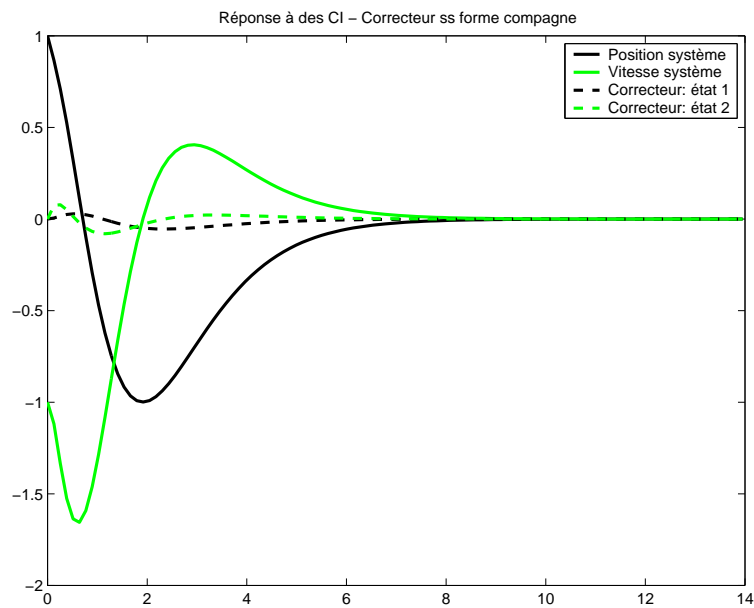


FIG. 4.2 – Simulation en boucle fermée avec le correcteur sous forme compagne horizontale canonique.

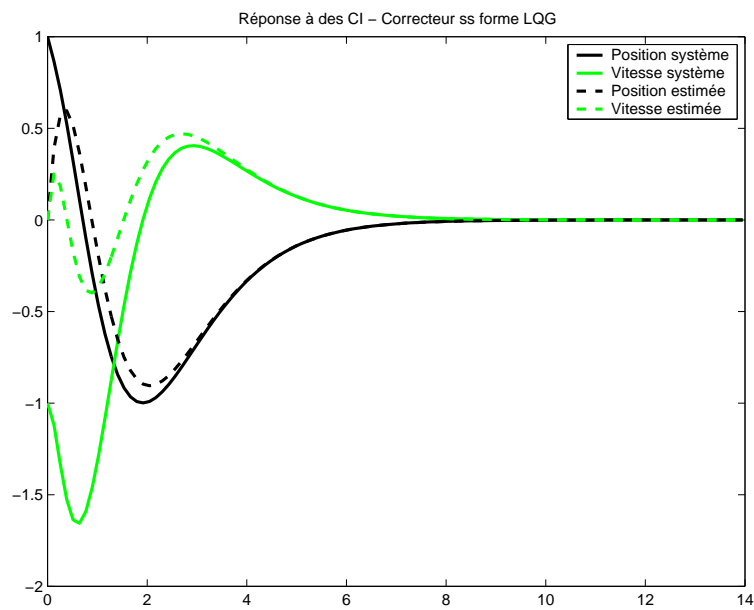


FIG. 4.3 – Simulation en boucle fermée avec le correcteur sous forme LQG équivalente.

## 4.5 Exercice

On considère le système suivant (double intégration) :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (4.8)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x . \quad (4.9)$$

Un correcteur  $K(s)$  a été préalablement synthétisé par une technique inconnue :

$$K(s) = \frac{U}{Y}(s) = -\frac{20s + 8}{s^2 + 7s + 18} \quad (4.10)$$

- Donner une représentation d'état du correcteur et calculer les valeurs propres de la boucle fermée,
- mettre le correcteur sous forme LQG (on affectera les valeurs propres les plus lentes à la dynamique de commande  $\text{spec}(A - BK_c)$ ).



# Chapitre 5

## La forme standard

### 5.1 Introduction

La forme standard regroupe dans un modèle augmenté, noté  $P(s)$  sur la Figure 5.1 le modèle et le critère de synthèse. On distingue deux types d'entrées : les commandes ( $u$ ) et les perturbations ou consignes ( $w$ ) dites entrées exogènes ; et deux types de sorties : les mesures ( $y$ ) et les sorties régulées ( $z$ ).

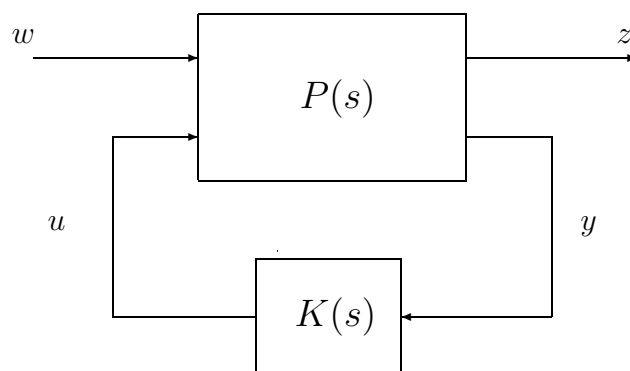


FIG. 5.1 – *La forme standard.*

Si le correcteur  $K(s)$  est connu (*problème d'analyse*), cette représentation donne la fonction de transfert en boucle fermée et permet de manipuler les normes. Si  $K(s)$  est à déterminer (*problème de synthèse*), la seule donnée de la matrice de transfert  $P(s)$  suffit à exprimer complètement le problème.

La forme standard est représentée par le quadripôle fréquentiel :

$$P(s) = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix}. \quad (5.1)$$

ou la représentation d'état augmentée :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \\ y \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ \hline C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array} \right] \begin{bmatrix} x \\ w \\ u \end{bmatrix}, \quad (5.2)$$

On reconnaît cependant dans les matrices  $A, B_2, C_2, D_{22}$  les matrices  $A, B, C, D$  classiques, dans le cas particulier où le vecteur  $y$  du quadripôle est effectivement le vecteur de mesures et le vecteur  $u$  le vecteur de commandes. Ce n'est pas toujours le cas, comme nous le verrons par exemple avec la forme standard de la sensibilité mixte.

Le transfert  $G_{zw}(s)$  en boucle fermée entre  $w$  et  $z$ , noté aussi par définition  $F_l(P, K)$ , s'écrit :

$$G_{zw}(s) = F_l(P, K) = P_{11}(s) + P_{12}(s)K(s)(I - P_{22}(s)K(s))^{-1}P_{21}(s). \quad (5.3)$$

Le *problème de synthèse* consiste à trouver  $K(s)$  stabilisant et minimisant le transfert  $G_{zw}(s)$  au sens :

- de la norme  $H_2$  qui s'exprime par :
  - $\|G_{zw}\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Trace}(G_{zw}(-j\omega)^T G_{zw}(j\omega)) d\omega}$  dans le domaine fréquentiel,
  - $\|G_{zw}\|_2 = \sqrt{\int_0^{+\infty} \text{Trace}(z(t)^T z(t)) dt}$  dans le domaine temporel ( $z(t)$  désigne alors la matrice des réponses impulsionnelles de  $G_{zw}(s)$ ).

On parle alors de synthèse  $H_2$ ,

- de la norme  $H_\infty$  qui s'exprime dans le domaine fréquentiel par :  $\|G_{zw}\|_\infty = \sup_\omega \sigma_{max}(G_{zw}(j\omega))$ . On parle alors de synthèse  $H_\infty$ .

## 5.2 Liens entre synthèse $H_2$ et synthèse LQG

D'une façon générale, une synthèse LQG sur un système représenté par un quadruplet  $(A_{n \times n}, B_{n \times m}, C_{p \times n}, D_{p \times m})$  et réglée à partir de trois matrices de pondération  $(Q_x, R, S)^1$  et de trois matrices de covariance  $(W_x, V, T)^2$  est équivalente à la synthèse  $H_2$  sur la forme standard présentée Figure 5.2.

**Réciproquement :** la synthèse  $H_2$  sur la forme standard générale  $P(s)$  décrite par (5.1) est rigoureusement équivalente à une synthèse LQG sur le système représenté par

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + B_2 u + w_x \\ y &= C_2 x + D_{22} u + v \end{cases}, \quad (5.4)$$

1. Rappel : dans le cas général le critère LQ s'écrit  $J = \int_0^\infty (x^T Q_x x + 2x^T S u + u^T R u) dt$ .
2. T est la matrice de corrélation entre les bruits d'état  $w_x(t)$  et de mesure  $v(t)$  :  $E[w_x(t)v^T(t)] = T\delta(t)$ .

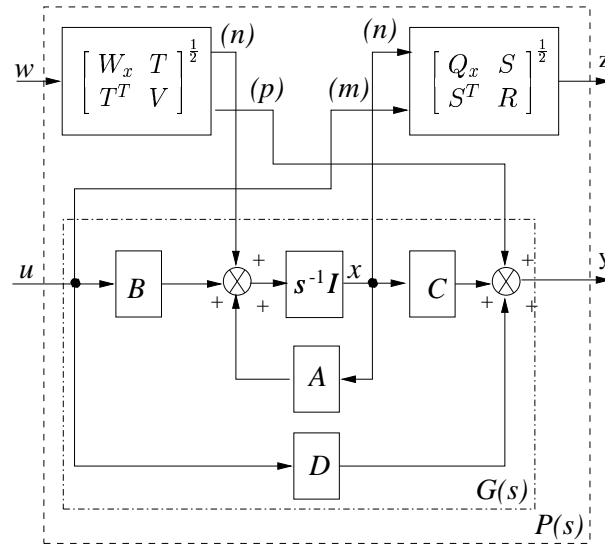


FIG. 5.2 – Forme standard associée à la synthèse LQG.

si :

- les trois matrices de pondération  $(Q_x, R, S)$  du critère LQ vérifient :

$$\begin{bmatrix} Q_x & S \\ S^T & R \end{bmatrix} = [C_1 \ D_{12}]^T [C_1 \ D_{12}] = \begin{bmatrix} C_1^T C_1 & C_1^T D_{12} \\ D_{12}^T C_1 & D_{12}^T D_{12} \end{bmatrix}, \quad (5.5)$$

- les trois matrices de covariance  $(W_x, V, T)$  des bruits d'état et de mesures vérifient :

$$\begin{bmatrix} W_x & T \\ T^T & V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ D_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ D_{21} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} B_1 B_1^T & B_1 D_{21}^T \\ D_{21} B_1^T & D_{21} D_{21}^T \end{bmatrix}. \quad (5.6)$$

Il n'y a donc pas de limite quant à l'interprétation de la synthèse  $H_2$  en terme de synthèse LQG et on retrouvera les mêmes propriétés et les mêmes comportements asymptotiques.

## 5.3 Pondérations fréquentielles

L'intérêt de la forme standard réside donc dans la clarté de son formalisme et l'interprétation physique du critère de synthèse puisqu'il est défini par une fonction de transfert voire même un schéma fonctionnel faisant apparaître des pondérations placées sur les signaux physiques d'entrée et de sortie du système et cela indépendamment de la norme que l'on désire minimiser ( $H_2$  ou  $H_\infty$ ). Cette formulation est propice à l'introduction de pondérations fréquentielles sur certain signaux

(par exemple: la commande) pour satisfaire des spécifications fréquentielles (par exemple: le “roll-off” aux fréquences élevées) pour lesquelles l’approche optimale de type LQG est mal adaptée (on notera toutefois que l’approche LQG fréquentielle proposée une solution dès le début des années 70 pour prendre en compte des spécifications fréquentielles, voir aussi la section 3.4 de [1]).

Des formes standards particulières (notamment la sensibilité mixte présentée figure 5.3) ont fait l’objet d’études détaillées et sont directement adaptées à la formulation des spécifications de robustesse fréquentielle sur les fonctions de sensibilité  $S = (I + GK)^{-1}$  et  $T = GKS$  (voir cours sur la synthèse  $H_\infty$ )

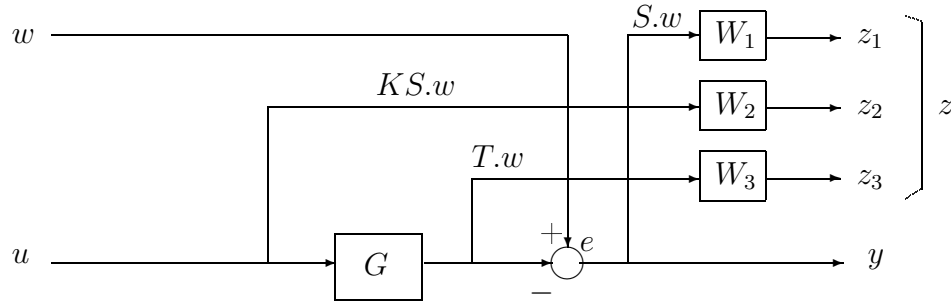


FIG. 5.3 – *Forme standard de la sensibilité mixte.*

# Références

- 1 “Robustesse et Commande Optimale” : D. Alazard, C. Cumer, P. Apkarian, M. Gauvrit et G. Ferrères - Cépaduès Éditions,
- 2 “Commande robuste des systèmes linéaires” : M. Gauvrit et P. Apkarian, Polycopié de cours Supaéro,
- 3 “Asservissement Non-Linéaire - facicule 3 - méthode de Lyapunov” A.Fossard, Polycopié de cours Supaéro- 1970.
- 4 “Commande optimale des processus déterministe” : M. Llibre, Polycopié de cours Supaéro,
- 5 “Techniques de commande robuste, approche par multiplicateurs et approche stochastique” : C. Manceaux-Cumer, thèse de l'École Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace-1998,
- 6 “Commande numérique des systèmes : application aux engins mobiles et aux robots” : Ouvrage collectif publié sous la direction de C. Fargeon, Éditions Masson.

PAGE SANS TEXTE

# BE sur MATLAB

## Commande des systèmes multivariables BE sur Matlab/Simulink - Commande modale, régulation LQ

### Commande de vol latérale d'un avion

Le modèle  $G$  de vol latéral d'un avion rigide est donné par la représentation d'état :

$$\begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{p} \\ \dot{r} \\ \dot{\phi} \\ n_y \\ p \\ r \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.140 & 0.053 & -0.999 & 0.047 & 0 & 0.030 \\ -2.461 & -0.992 & 0.262 & 0 & 0.404 & 0.260 \\ 1.585 & -0.041 & -0.267 & 0 & 0. & -0.680 \\ 0 & 1.000 & 0.053 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0.0433 & -0.0003 & 0.0016 & 0 & 0.0001 & -0.0075 \\ 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ p \\ r \\ \phi \\ dp \\ dr \end{bmatrix}. \quad (5.7)$$

- 4 états :  $\beta$  (dérapage),  $P$  (vitesse de roulis),  $R$  (vitesse de dérapage),  $\phi$  (assiette latérale),
- 2 commandes :  $dp$  (braquage ailerons) et  $dr$  (braquage gouverne),
- 4 mesures :  $n_y$  (accélération latérale),  $P$  (vitesse de roulis),  $R$  (vitesse de lacet),  $\phi$  (assiette latérale),

On souhaite synthétiser une loi de commande de vol selon le schéma présenté figure 1 où  $H$  est une pré-commande statique calculée pour satisfaire la contrainte en régime permanent :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \beta(t) \\ \phi(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{consigne} \\ \phi_{consigne} \end{bmatrix}$$

Pour toutes les synthèses qui suivent :

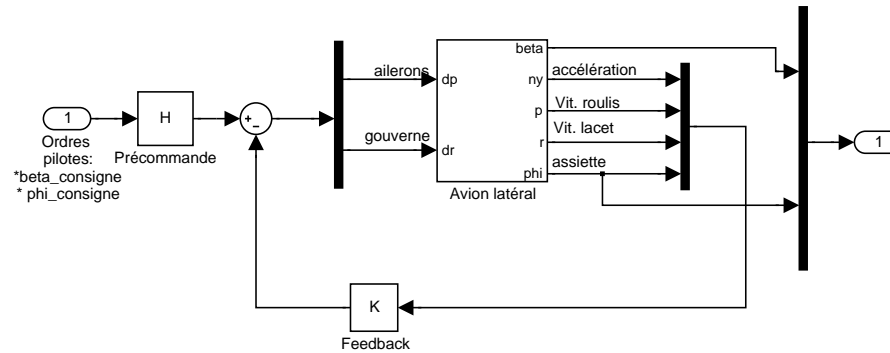


FIG. 5.4 – Architecture de commande

- on calculera d'abord le retour d'état ( $u = -K_x x$ ),
- le nombre de sorties étant égal au nombre d'états, on calculera le retour de sortie  $K$  équivalent au retour d'état  $K_x$ ,
- on calculera ensuite la pré-commande  $H$ ,
- on tracera enfin les réponses indicielles (macro **step**) du système en boucle fermée décrit par la figure 1 et la marge de module en fonction de la pulsation.

## Approche modale

Le cahier des charges est le suivant :

- placer le mode de roulis pur en  $-1.1$  et le découpler de  $\beta$ ,
  - placer le mode spiral en  $-1$  et le découpler de  $\beta$ ,
  - placer le mode de roulis hollandais en  $-1 \pm 1.3i$  et le découpler de  $\phi$ .
- calculer et analyser la loi de commande qui assure seulement le placement des valeurs propres (macro **place**),
- calculer et analyser la loi de commande qui assure également les spécifications de découplage.

## Approche LQ

On cherche la loi de commande qui minimise le critère :

$$J = \int_0^{\infty} (q_{\beta} \beta^2 + q_p p^2 + q_r r^2 + q_{\phi} \phi^2 + dr^2 + dp^2) dt$$

- évaluer qualitativement l'influence des pondérations  $q_{\beta}$ ,  $q_p$ ,  $q_r$  et  $q_{\phi}$  sur la dynamique du système (on tracera par exemple la carte des pôles pour différents jeux de pondérations ou des "root square locus" à l'aide de la macro **rsqlocus**),



- en jouant sur  $q_r$  et  $q_\phi$ , calculer un retour d'état qui amortisse au moins à 0.6 le mode de roulis hollandais et place le mode spiral au delà de -1 (rd/s). Analyser cette solution. Qu'en est-il du découplage?,
- chercher un jeu de pondérations tel que le taux de couplage (mesuré sur les réponses indicielles) soit inférieur à 15%.

PAGE SANS TEXTE