

ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE DE LA  
COMMANDE ROBUSTE

PIERRE APKARIAN



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Elements introductifs à la commande robuste</b>	<b>7</b>
1.1	Introduction . . . . .	7
1.2	Rappels d'Automatique . . . . .	9
1.2.1	Systèmes linéaires . . . . .	9
1.2.2	Interconnexions de systèmes . . . . .	13
1.2.3	Normes de matrices, signaux et systèmes . . . . .	15
1.2.4	Calcul des normes $H_2$ et $H_\infty$ . . . . .	16
1.3	Notions Élémentaires sur les Asservissements . . . . .	17
1.3.1	Rôle d'un asservissement . . . . .	18
1.3.2	Quelques configurations de boucle . . . . .	20
1.3.3	Équations et Fonctions Caractéristiques . . . . .	22
1.4	Propriétés des Asservissements . . . . .	23
1.4.1	Stabilité . . . . .	23
1.4.2	Performances . . . . .	26
1.4.3	Bande passante . . . . .	29
1.4.4	Réponse temporelle . . . . .	30
1.4.5	Outils d'analyse des asservissements . . . . .	31
1.5	Ingrédients pour un Asservissement Robuste . . . . .	35
1.5.1	Robustesse à l'incertitude . . . . .	36
1.5.2	Représentation de l'incertitude de modélisation . . . . .	37
1.5.3	Stabilité robuste . . . . .	39
1.5.4	Passivité . . . . .	45
	<b>Références</b> . . . . .	<b>47</b>
<b>2</b>	<b>La synthèse <math>H_\infty</math></b>	<b>49</b>
2.1	Méthodes $H_\infty$ pour la Synthèse d'Asservissements . . . . .	50
2.1.1	Le problème $H_\infty$ standard . . . . .	50
2.1.2	Formulation $H_\infty$ du <i>loop shaping</i> . . . . .	51

2.2	Résolution du Problème $H_\infty$ . . . . .	53
2.2.1	Résolution du problème normalisé . . . . .	53
2.2.2	Solution générale des problèmes $H_\infty$ réguliers . . . . .	58
2.3	Loop Shaping par les Méthodes $H_\infty$ . . . . .	60
2.3.1	Solution $H_\infty$ du problème de <i>loop shaping</i> . . . . .	60
2.3.2	Choix des fonctions de pondération . . . . .	62
2.3.3	Exemple de mise en œuvre . . . . .	64
2.3.4	Faiblesses du compensateur central . . . . .	69
2.3.5	Comment prévenir les simplifications exactes? . . . . .	72
2.4	Techniques LMI pour la synthèse $H_\infty$ . . . . .	75
	<b>Références</b> . . . . .	78
<b>3</b>	<b>Techniques de <math>\mu</math>-analyse et de <math>\mu</math> synthèse</b>	<b>83</b>
3.1	Cas particulier de la robustesse paramétrique . . . . .	84
3.1.1	Obtention du schéma d'interconnection standard . . . . .	84
3.1.2	Introduction à la $\mu$ analyse réelle . . . . .	86
3.1.3	Choix des pondérations sur les incertitudes . . . . .	88
3.2	Cas général . . . . .	89
3.2.1	Cas d'une seule dynamique négligée . . . . .	89
3.2.2	Cas de plusieurs dynamiques négligées . . . . .	90
3.2.3	Cas général . . . . .	92
3.3	Définition de la VSS . . . . .	93
3.3.1	Notations et définitions . . . . .	93
3.3.2	Cas de perturbations de structure particulière . . . . .	93
3.3.3	Problèmes théoriques . . . . .	95
3.4	Performance robuste . . . . .	97
3.4.1	Robustesse d'un placement de pôles . . . . .	97
3.4.2	Théorème de la boucle principale . . . . .	99
3.4.3	Vérification d'un gabarit fréquentiel . . . . .	100
3.5	Forme LFT pour les incertitudes paramétriques . . . . .	101
3.6	Méthodes de calcul de la VSS mixte . . . . .	104
3.6.1	Calcul d'une borne supérieure de la VSS . . . . .	105
3.6.2	Calcul d'une borne inférieure de la VSS . . . . .	107
3.7	La $\mu$ -synthèse . . . . .	109
3.7.1	Exemple . . . . .	109
3.7.2	Problème général . . . . .	111
3.7.3	La $D - K$ itération . . . . .	112

3.7.4	La $D - G, K$ itération . . . . .	113
3.7.5	Conclusion . . . . .	116
<b>Références</b>	. . . . .	117
<b>A</b>	<b>Rappels d'Algèbre Linéaire</b>	<b>119</b>
A.1	Généralités . . . . .	119
A.2	Équations linéaires et matricielles . . . . .	121
A.3	Réduction équilibrée . . . . .	123
A.3.1	Algorithme . . . . .	125
A.3.2	Exemple . . . . .	125
A.4	Transformation Linéaire Fractionnaire (LFT) . . . . .	126
A.4.1	Definitions . . . . .	126
A.4.2	Propriétés . . . . .	127
A.4.3	Exemple de réalisation LFT . . . . .	129



# Chapitre 1

## Elements introductifs à la commande robuste

### 1.1 Introduction

La théorie de la Commande “Robuste” des Systèmes Linéaires a connu un essor remarquable durant ces dix dernières années. Sa popularité gagne aujourd’hui le milieu industriel où elle se révèle un outil précieux pour l’analyse et la conception des systèmes asservis. Cette percée rapide tient à deux atouts majeurs:

- son caractère appliqué et son adéquation aux problèmes pratiques de l’ingénieur automaticien,
- sa contribution à la systématisation du processus de synthèse d’un asservissement.

Pour apprécier l’originalité et l’intérêt des outils de Commande Robuste, rappelons qu’un asservissement a deux fonctions essentielles:

- façonner la réponse du système asservi pour lui imprimer le comportement désiré,
- maintenir ce comportement face aux aléas et fluctuations qui affectent le système pendant son fonctionnement (rafales de vent pour un avion, usure pour un système mécanique, changement de configuration pour un robot, etc.).

Cette seconde exigence est qualifiée de “robustesse à l’incertitude”. Elle revêt une importance critique pour la fiabilité du système asservi. En effet, l’asservissement est typiquement conçu à partir d’un modèle idéalisé et simplifié du système réel. Pour fonctionner correctement, il doit donc être robuste aux imperfections du modèle, c’est-à-dire aux écarts entre le modèle et le système réel, aux dérives des paramètres physiques, et aux perturbations externes.

L’avantage essentiel des techniques de Commande Robuste est de générer des lois de commande qui satisfont à la double exigence mentionnée ci-dessus. Plus

précisément, étant donné une spécification fréquentielle du comportement désiré et une estimation de l'ordre de grandeur de l'incertitude, la théorie évalue la faisabilité, produit une loi de commande adaptée, et fournit une garantie sur le domaine de validité de cette loi de commande (robustesse). Cette démarche de synthèse est systématique et très générale. En particulier, elle est directement applicable aux systèmes à plusieurs entrées/sorties.

Dans une certaine mesure, la théorie de la Commande Robuste réconcilie l'Automatique Classique à dominante fréquentielle (Bode, Nyquist, P.I.D.) et l'Automatique Moderne à dominante variables d'état (Commande Linéaire Quadratique, Kalman). Elle combine en effet le meilleur des deux. De l'Automatique Classique, elle emprunte la richesse de l'analyse fréquentielle des systèmes. Ce cadre est particulièrement favorable à la spécification des objectifs de performance (qualité du suivi ou de la régulation), de bande passante (domaine d'action de l'asservissement) et de robustesse. De l'Automatique Moderne, elle hérite la simplicité et la puissance des méthodes de synthèse par variables d'état des asservissements. Grâce à ces outils systématiques de synthèse, l'ingénieur peut désormais imposer des spécifications fréquentielles complexes et obtenir directement un diagnostic de faisabilité et une loi de commande appropriée. Il peut ainsi se concentrer sur la recherche du meilleur compromis et analyser les limites de son système.

Ce cours est une introduction aux techniques de Commande Robuste. Comme ce domaine est encore en pleine évolution, on s'efforcera essentiellement de brosser un état de l'art en insistant sur les méthodes déjà éprouvées et sur la philosophie sous-jacente. Par souci de simplicité, on se restreindra aux systèmes linéaires stationnaires (*linear time-invariant*, **LTI**) en temps continu. Enfin, pour rester fidèle à l'esprit pratique de cette théorie, on mettra l'accent sur la mise en œuvre plutôt que sur les aspects mathématiques et historiques de la théorie.



## 1.2 Rappels d'Automatique

Dans cette section, on rappelle quelques notions élémentaires d'automatique qui seront utilisées tout au long de ce cours. Les notions mathématiques sous-jacentes sont rappelées en appendice.

### 1.2.1 Systèmes linéaires

- La transformée de Laplace d'un signal temporel  $x(t)$  sur  $(0, +\infty)$  est la fonction  $X = \mathcal{L}[x]$  de la variable complexe  $s$  définie par:

$$X(s) = \int_0^{+\infty} x(t)e^{-st} dt. \quad (1.1)$$

On rappelle ses principales propriétés:

- $\mathcal{L}[x(t + \tau)] = e^{s\tau}X(s)$ .
- $\mathcal{L}\left[\frac{dx}{dt}\right] = sX(s) - x(0)$ .
- $\mathcal{L}\left[\int_0^t x(u)du\right] = \frac{X(s)}{s}$ .
- Transformée d'une convolution temporelle:  $\mathcal{L}[x * y] = X(s)Y(s)$ .
- Théorème de la valeur initiale:

$$\lim_{t \rightarrow 0} x(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s).$$

- Théorème de la valeur finale:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s).$$

- Représentation externe (fonction de transfert).  
Soit  $g(t)$  la réponse impulsionnelle d'un système linéaire stationnaire  $\mathcal{S}$ , c'est-à-dire sa réponse à l'entrée  $u(t) = \delta(t)$ . Par le principe de superposition, on montre que pour une entrée  $u(t)$  quelconque, la sortie  $y(t)$  est donnée par

$$y = g * u.$$

En prenant la transformée de Laplace de cette équation, on obtient

$$Y(s) = G(s)U(s).$$

La transformée de Laplace  $G(s)$  de la réponse impulsionnelle  $g(t)$  est appelée **fonction de transfert** de l'entrée  $U$  à la sortie  $Y$ , ou encore **réponse fréquentielle** du système.

Pour les systèmes de dimension finie,  $G(s)$  est une matrice de fractions rationnelles.  $G(s)$  est **propre** si  $\|G(\infty)\| < +\infty$ , et **strictement propre** si  $G(\infty) = 0$ .

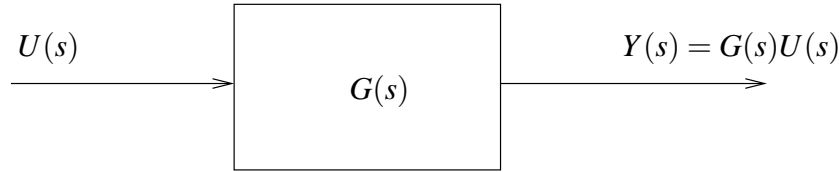


FIG. 1.1 – Fonction de transfert.

Le système est dit **mono-entrée/mono-sortie** si  $u$  et  $y$  sont des scalaires, et **multi-entrées/multi-sorties** ou **multivariable** si l'un des deux est un vecteur. On utilisera les abréviations anglaises SISO (*single-input/single-output*) et MIMO (*multi-input/multi-output*).

– Représentation interne.

Lorsqu'on a accès aux équations d'évolution physique du système, on peut décrire explicitement son comportement par la dynamique de ses variables internes (entités physiques caractérisant l'état du système). On obtient alors des équations "d'état" de la forme

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (1.2)$$

où

$x(t)$  est le vecteur d'état (variables internes)  
 $u(t)$  est le vecteur des entrées (ou de commande)  
 $y(t)$  est le vecteur des sorties (ou d'observation)

En prenant la transformée de Laplace de (1.2), on vérifie aisément que la fonction de transfert de  $U(s)$  à  $Y(s)$  est alors donnée par

$$G(s) = D + C(sI - A)^{-1}B \quad (1.3)$$

qui est bien une matrice de fractions rationnelles. On utilisera aussi la notation  $G = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ . Réciproquement, à toute fonction de transfert propre on peut associer une représentation interne équivalente de la forme (1.2). Le quadruplet  $(A, B, C, D)$  s'appelle une **réalisation** de  $G(s)$ . Cette réalisation est minimale si  $(A, B)$  est commandable et  $(C, A)$  observable.

– Pôles et zéros d'un système.

Pour un système SISO donné par sa fonction de transfert irréductible  $G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ , les pôles (ou modes) sont les racines du dénominateur  $D(s)$  et les zéros sont les racines du numérateur  $N(s)$ . La notion de pôle s'étend au cas où

$G(s)$  est une matrice carrée: les pôles de  $G$  sont les pôles de la fraction rationnelle  $\det(G(s))$ . L'extension au cas rectangulaire est plus délicate et il est préférable de l'énoncer en terme de la représentation d'état associée. En effet, pour un système de représentation (1.2), les notions de pôle et de zéro ont les définitions simples suivantes:

- les pôles sont les valeurs propres de  $A$ ,
- les zéros sont les valeurs complexes  $s$  pour lesquelles le rang de  $\begin{pmatrix} sI - A & -B \\ C & D \end{pmatrix}$  chute.

Cette dernière définition englobe les modes non observables ou non commandables en plus des zéros de blocage proprement dits (valeurs de  $s$  pour lesquelles  $G(s)$  perd du rang).

– Commandabilité, Observabilité.

Ces notions sont liées à la représentation interne (1.2). Si  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , l'espace commandable par la paire  $(A, B)$  est

$$C = \text{Im}(B, AB, \dots, A^{n-1}B) \subset \mathbb{R}^n$$

Il représente l'ensemble des états initiaux  $x_0$  qui peuvent être amenés à zéro en un temps fini par une commande  $u$  appropriée.

La paire  $(A, B)$  est dite **commandable** si et seulement si  $C = \mathbb{R}^n$ . On montre alors que les modes (valeurs propres) de  $A$  peuvent être assignés arbitrairement par retour d'état  $u = Fx$ . Autrement dit, les modes de  $A + BF$  peuvent être placés arbitrairement par choix de  $F$ .

Plus généralement, toute paire  $(A, B)$  peut se décomposer (par transformation orthogonale) comme suit:

$$U^T A U = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}; \quad U^T B = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

avec  $(A_{11}, B_1)$  commandable. Les modes de  $A_{22}$  sont les modes non commandables, c'est-à-dire invariants par retour d'état: ils restent présents dans le spectre de  $A + BF$  pour tout  $F$ .

L'observabilité est une notion duale. Les états non observables du système sont ceux qui n'affectent pas la sortie ni directement, ni par l'intermédiaire d'autres états. L'espace non observable est:

$$\bar{O} = \text{Ker} \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}.$$

La paire  $(C, A)$  est **observable** si et seulement si  $\bar{O} = \{\vec{0}\}$  ou, de façon équivalente, si  $(A^T, C^T)$  est commandable. La contrepartie de la décomposition (1.4)

est:

$$U^T A U = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}; \quad C U = (C_1, 0) \quad (1.5)$$

avec  $(C_1, A_{11})$  observable.

Enfin  $(A, B)$  est dite **stabilisable** s'il existe  $F$  telle que  $A + BF$  soit stable; autrement dit, si tous les modes non commandables sont stables. La notion duale pour  $(C, A)$  est **délectable** ( $\exists H, A + HC$  stable).

– **Réalisation minimale:** le quadruplet de matrices  $(A, B, C, D)$  est une réalisation minimale de la fonction de transfert propre  $G(s)$  si  $(A, B)$  est commandable,  $(C, A)$  est observable, et  $G(s) = D + C(sI - A)^{-1}B$ .

– **Stabilité.**

Considérons le système

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

et la fonction de transfert entrée/sortie associée  $G(s) = D + C(sI - A)^{-1}B$ . On distingue deux notions de stabilité:

**stabilité BIBO** (*bounded input/bounded output*): le système est dit BIBO-stable si la sortie reste d'énergie finie tant que l'entrée est d'énergie finie.

Une condition nécessaire et suffisante est que tous les pôles de la *forme irréductible* de  $G(s)$  soient dans le demi-plan  $Re(s) < 0$ .

**stabilité interne:** le système est stable de façon interne si  $A$  est stable, i.e., si toutes ses valeurs propres sont à partie réelle négative. Ceci assure que pour  $u \equiv 0$ , l'état  $x(t)$  décroît vers 0 indépendamment de la condition initiale.

La stabilité interne garantit la stabilité BIBO, mais la réciproque est fautive. Par exemple, le système d'équations d'état

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y = (1, 1)x \end{cases}$$

n'est pas stable de façon interne à cause du mode  $+1$  de  $A$ . Pourtant, la fonction de transfert associée est  $G(s) = \frac{1}{s+1}$  qui est BIBO-stable.

On notera que le mode  $+1$  est non commandable, donc invisible dans la relation entrée/sortie. Physiquement, cela signifie qu'une entrée bornée donnera bien une sortie bornée, mais que la dynamique interne tendra à diverger pour la plupart des conditions initiales (ce qui peut avoir des conséquences très déplorable à l'intérieur du système!).

Enfin, les deux notions coïncident dès que la réalisation  $(A, B, C)$  de  $G(s)$  est minimale, et diffèrent seulement lorsque cette réalisation comporte des modes non minimaux et instables (comme  $+1$  dans l'exemple ci-dessus).

## 1.2.2 Interconnexions de systèmes

Les formules données ci-dessous indiquent comment combiner les réalisations d'état dans une somme, un produit, une inversion, une dérivation et une transformée linéaire fractionnaire de système(s).

- Somme: si  $G_1(s)$  et  $G_2(s)$  admettent comme réalisation minimale:

$$G_1 = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix}; \quad G_2 = \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix}, \quad (1.6)$$

une réalisation minimale de la somme  $G_1(s) + G_2(s)$  est:

$$G_1 + G_2 = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} \\ (C_1 \quad C_2) & D_1 + D_2 \end{bmatrix}. \quad (1.7)$$

- Produit: pour  $G_1(s)$  et  $G_2(s)$  de réalisation minimale (1.6), une réalisation minimale du produit  $G_1(s)G_2(s)$  est:

$$G_1.G_2 = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & B_1C_2 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} B_1D_2 \\ B_2 \end{pmatrix} \\ (C_1 \quad D_1C_2) & D_1D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ B_1C_2 & A_1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} B_2 \\ B_1D_2 \end{pmatrix} \\ (D_1C_2 \quad C_1) & D_1D_2 \end{bmatrix}. \quad (1.8)$$

- Inverse: la fonction de transfert  $G = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$  est inversible si et seulement si  $D$  est inversible. Alors une réalisation minimale de  $G^{-1}(s)$  est:

$$G^{-1} = \begin{bmatrix} A - BD^{-1}C & BD^{-1} \\ -D^{-1}C & D^{-1} \end{bmatrix}. \quad (1.9)$$

- Dérivation: si  $G = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ , une réalisation minimale de  $sG(s)$  est

$$sG = \begin{bmatrix} A & B \\ CA & CB + sD \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & AB \\ C & CB + sD \end{bmatrix}. \quad (1.10)$$

- Transformation linéaire fractionnaire.

Cette transformation intervient dans la connection de deux systèmes par feedback suivant le schéma de la Figure 1.2. Le système  $P(s)$  décrit la relation entre les signaux d'entrée  $w$  et  $u$  et les signaux de sortie  $y$  et  $z$ :

$$\begin{pmatrix} Z(s) \\ Y(s) \end{pmatrix} = P(s) \begin{pmatrix} W(s) \\ U(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W(s) \\ U(s) \end{pmatrix}.$$

Lorsque ce système est bouclé sur le retour de sortie:

$$u = K(s)y,$$

la fonction de transfert en boucle fermée de  $W(s)$  à  $Z(s)$  est:

$$\mathcal{F}(P,K) = P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21}.$$

Cette expression s'appelle la transformée linéaire fractionnaire (**LFT**) de  $P$  et  $K$ .

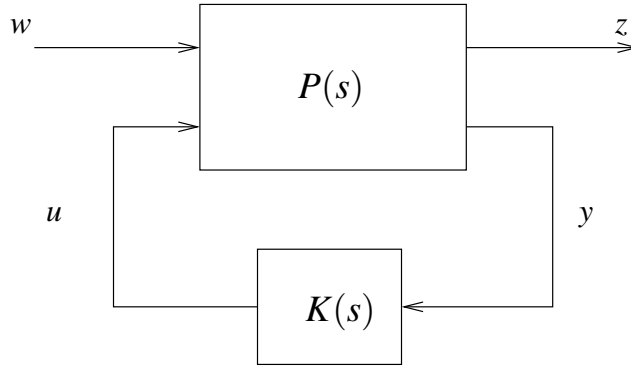


FIG. 1.2 – Transformation linéaire fractionnaire.

Si des réalisations minimales de  $P(s)$  et  $K(s)$  sont:

$$P(s) = \begin{pmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} (sI - A)^{-1} \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \end{pmatrix}; \quad (1.11)$$

$$K(s) = D_K + C_K(sI - A_K)^{-1}B_K, \quad (1.12)$$

une réalisation (pas nécessairement minimale) de  $\mathcal{F}(P,K)$  est donnée par:

$$\mathcal{F}(P,K) = D_{BF} + C_{BF}(sI - A_{BF})^{-1}B_{BF}$$

avec

$$A_{BF} = \begin{pmatrix} A + B_2(I - D_K D_{22})^{-1}D_K C_2 & B_2(I - D_K D_{22})^{-1}C_K \\ B_K(I - D_{22}D_K)^{-1}C_2 & A_K + B_K(I - D_{22}D_K)^{-1}D_{22}C_K \end{pmatrix};$$

$$B_{BF} = \begin{pmatrix} B_1 + B_2(I - D_K D_{22})^{-1}D_K D_{21} \\ B_K(I - D_{22}D_K)^{-1}D_{21} \end{pmatrix};$$

$$C_{BF} = (C_1 + D_{12}(I - D_K D_{22})^{-1}D_K C_2, D_{12}(I - D_K D_{22})^{-1}C_K);$$

$$D_{BF} = D_{11} + D_{12}(I - D_K D_{22})^{-1}D_K D_{21}. \quad (1.13)$$

La stabilité interne de la boucle fermée est équivalente à la stabilité de  $A_{BF}$ , c'est-à-dire à  $\Re(\lambda_i(A_{BF})) < 0$ .

### 1.2.3 Normes de matrices, signaux et systèmes

- Vecteurs: la norme euclidienne de  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$  est

$$\|x\| = \sqrt{x^T x} = (\sum x_i^2)^{1/2}.$$

- Matrices: on utilisera le plus souvent la norme induite par la norme euclidienne, définie par

$$\|A\|_2 = \sup_{u \neq 0} \frac{\|Au\|}{\|u\|}$$

On montre que  $\|A\|_2 = \sigma_{\max}(A) = \lambda_{\max}(AA^T)^{1/2}$  (plus grande valeur singulière) d'où le nom de "norme de la valeur singulière". A noter que, pour  $A$  inversible,

$$\|A^{-1}\|_2 = 1/\sigma_{\min}(A)$$

et que

$$\sigma_{\min}(A) = \inf_{u \neq 0} \frac{\|Au\|}{\|u\|} = \inf \{\|X\|_2 : A + X \text{ singulière}\}.$$

Une autre norme importante est la norme de Frobenius:

$$\|A\|_F = \sqrt{\text{Trace}(A^T A)}$$

D'autres propriétés des valeurs singulières sont données en annexe [A](#)

- Signaux.

Sur l'espace  $\ell_2$  des signaux de carré sommable sur  $(0, \infty)$ , on définit le produit scalaire

$$\langle x, y \rangle = \int_0^{+\infty} x(t)y(t)dt$$

qui induit la norme de l'énergie:

$$\|x\|_2 = \left( \int_0^{+\infty} \|x(t)\|^2 dt \right)^{1/2}.$$

La transformée de Fourier envoie  $\ell_2$  sur l'espace  $H_2$  des fonctions  $X(s)$  analytiques dans  $\text{Re}(s) \geq 0$  et de carré sommable. Par l'identité de Parseval, on a

$$\|x\|_2 = \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \|X(j\omega)\|^2 d\omega \right)^{1/2}.$$

Pour les signaux admettant une transformée de Laplace  $X(s)$  analytique dans  $\text{Re}(s) \geq 0$ , on considèrera aussi la norme:

$$\|X\|_{\infty} = \sup_{\text{Re}(s) \geq 0} \|X(s)\| = \sup_{\omega} \|X(j\omega)\|.$$

On appelle  $H_\infty$  l'espace des fonctions  $X(s)$  analytiques dans  $\Re(s) \geq 0$  et telles que  $\|X\|_\infty < \infty$ . Contrairement à  $H_2$ , cet espace n'est pas un espace de Hilbert. C'est à dire que l'on ne dispose pas du concept de produit scalaire. Ce point introduit, comme nous le verrons plus loin, des différences notables dans les théories  $H_2$  et  $H_\infty$ .

- **Systèmes:** soit  $\mathcal{S}$  un système linéaire stationnaire de fonction de transfert  $G(s)$ . On s'intéressera aux deux normes suivantes sur la relation entrée/sortie.

**Norme  $H_2$ :**

$$\begin{aligned} \|G(s)\|_2 &= \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Tr}(G^*(j\omega)G(j\omega))d\omega \right)^{1/2} \\ &= \sup_{U(s) \in H_\infty} \frac{\|Y(s)\|_2}{\|U(s)\|_\infty} \end{aligned}$$

Interprétation: c'est l'énergie en sortie du système lorsqu'on injecte un Dirac en entrée (cas SISO), où plus généralement un bruit blanc vérifiant  $U(j\omega)U^*(j\omega) = I$  (densité spectrale uniforme). La norme  $\|G(s)\|_2$  est finie si et seulement si  $G(s)$  est strictement propre.

**Norme  $H_\infty$ :**

$$\begin{aligned} \|G(s)\|_\infty &= \sup_{\omega} \sigma_{\max}(G(j\omega)) \\ &= \sup_{U(s) \in H_2} \frac{\|Y(s)\|_2}{\|U(s)\|_2}. \end{aligned}$$

Interprétation: c'est la norme induite par la norme des fonctions de  $H_2$ . Elle mesure le gain maximal de la réponse fréquentielle  $G(j\omega)$  (cf. diagramme de Bode).

### 1.2.4 Calcul des normes $H_2$ et $H_\infty$

On donne ici des algorithmes pratiques pour le calcul des normes  $H_2$  et  $H_\infty$  d'une fonction de transfert  $G(s) = D + C(sI - A)^{-1}B$ . Pour la norme  $H_2$ , on supposera que  $A$  est stable. En remarquant que  $G(j\omega)$  est la transformée de Fourier de  $Ce^{At}B$ , l'identité de Parseval donne:

$$\int_0^{+\infty} B^T e^{tA^T} C^T C e^{tA} B dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G^*(j\omega)G(j\omega)d\omega. \quad (1.14)$$

Soit

$$Q := \int_0^{+\infty} e^{tA^T} C^T C e^{tA} dt. \quad (1.15)$$

On montre que  $Q$  est la solution de l'équation de Lyapunov:

$$A^T Q + QA + C^T C = 0. \quad (1.16)$$



En prenant la trace de chaque membre de (1.14), on obtient

$$\|G\|_2^2 = \text{Tr}(B^T Q B), \quad (1.17)$$

ce qui fournit un algorithme simple pour évaluer cette norme. A noter que l'on a aussi

$$\|G\|_2^2 = \text{Tr}(C P C^T) \quad (1.18)$$

où  $P$  est la solution de

$$A P + P A^T + B B^T = 0. \quad (1.19)$$

Le calcul de la norme  $H_\infty$  est plus délicat. On peut tracer la fonction  $\omega \rightarrow \sigma_{\max}(G(j\omega))$  et déterminer la valeur maximale. Cette méthode présente cependant le risque de manquer un pic étroit. Un algorithme plus sûr est basé sur la caractérisation suivante.

**Théorème 1.2.1** *Soit  $(A, B, C, D)$  une réalisation de  $G(s)$ . On a toujours  $\|G\|_\infty > \sigma_{\max}(D)$  et pour tout  $\gamma > \sigma_{\max}(D)$ , il y a équivalence entre*

- (i)  $\|G\|_\infty < \gamma$ ,
- (ii) la matrice

$$H(\gamma) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -A^T \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & B \\ C^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma I & D \\ D^T & \gamma I \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & -B^T \end{pmatrix} \quad (1.20)$$

*n'a pas de valeur propre sur l'axe imaginaire.*

*De plus, si  $j\omega$  est une valeur propre de  $H(\gamma)$  pour  $\gamma > \sigma_{\max}(D)$ , alors  $\sigma_{\max}(G(j\omega)) = \gamma$ , i.e., le gain  $\gamma$  est obtenu à la fréquence  $\omega$ .*

La matrice  $H$  est d'une structure particulière dite "Hamiltonienne". Lorsque  $D = 0$ , elle s'écrit simplement  $H(\gamma) = \begin{pmatrix} A & \gamma^{-1} B B^T \\ -\gamma^{-1} C^T C & -A^T \end{pmatrix}$ .

Cette caractérisation suggère un simple algorithme de dichotomie pour calculer  $\|G\|_\infty$ . On part d'un encadrement grossier  $[\gamma_{\min}, \gamma_{\max}]$  de cette norme et on l'améliore itérativement de la façon suivante:

- on calcule le spectre de  $H(\gamma)$  pour  $\gamma = \frac{1}{2} (\gamma_{\min} + \gamma_{\max})$ ,
- s'il n'y a pas de valeur propre sur l'axe imaginaire,  $\gamma$  est trop grand et l'on obtient comme nouvel encadrement  $[\gamma_{\min}, \gamma]$ ;
- sinon,  $\gamma$  est trop petit et on obtient le nouvel encadrement  $[\gamma, \gamma_{\max}]$ .

### 1.3 Notions Élémentaires sur les Asservissements

Cette section contient quelques notions de base sur les asservissements (*feedback loops*). Une discussion plus précise de leurs propriétés et des principes fondamentaux régissant leur conception fera l'objet des deux sections suivantes.

Les propriétés des boucles d’asservissement ont été étudiées en détail par la théorie classique, notamment avec les travaux de Bode et Nyquist. Bien que conceptuellement simples, les principes dégagés n’en sont pas moins fondamentaux et incontournables dans la conception pratique des systèmes asservis. Par exemple, l’analyse qualitative d’une boucle d’asservissement suffit à révéler un des compromis essentiels auxquels l’automaticien est confronté: le compromis entre performance et robustesse.

Pour avoir “omis” certains de ces principes, en particulier l’importance de la robustesse, les méthodes de Commande Linéaire Quadratique Optimale n’ont pas connu le succès escompté auprès des praticiens. La théorie de la Commande Robuste s’efforce d’éviter ce piège et s’inspire largement de la perspective classique. Les notions développées dans cette section et dans la section 1.4 sont donc essentielles à une bonne compréhension des fondements de la Commande Robuste.

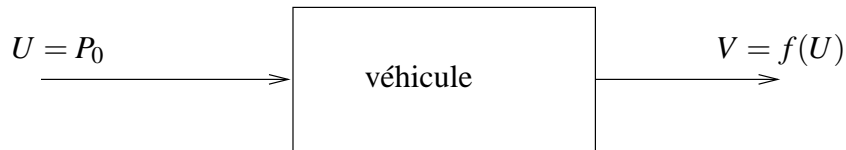
### 1.3.1 Rôle d’un asservissement

L’Automatique s’efforce d’exploiter les moyens d’action sur un système pour en maîtriser ou façonner le comportement. En l’absence de feedback, le système a un comportement propre caractérisé par la relation entre ses entrées et ses sorties ainsi que sa dynamique interne. Les entrées sont les moyens d’action sur le système (commandes). Les sorties résultent de la réaction du système à ces actions. Typiquement, on cherche à modéliser les sorties par un choix approprié des entrées.

Pour fixer les idées, prenons comme système une automobile et intéressons nous au problème de réguler la vitesse par l’action sur les pédales. On utilise ici accélérateur et frein. Ici l’entrée  $U$  est la combinaison des efforts exercés sur les pédales (effort positif pour une accélération, négatif pour un freinage). La sortie est la vitesse  $V$  du véhicule. Le comportement propre du système est décrit par l’évolution de la vitesse en fonction de l’effort d’accélération/freinage ( $V = f(U)$ ).

Supposons qu’on veuille maintenir une vitesse constante  $V_0$ . Une possibilité est de calculer la quantité d’accélération nécessaire pour compenser les frottements et appliquer la pression correspondante sur l’accélérateur. En supposant que le coefficient de frottement est constant et que la vitesse initiale est  $V_0$ , le modèle physique nous dit qu’une pression constante  $P_0$  sur l’accélérateur maintiendra la vitesse à la valeur  $V_0$ . La commande correspondante est  $U = +P_0$  (constante). On notera qu’une telle loi de commande est aveugle puisqu’elle ne reçoit aucune information sur la vitesse courante réelle du véhicule. Elle agit à chaque instant comme si la vitesse était  $V_0$ . On appelle ce type de commande une **commande boucle ouverte** (Fig. 1.3).

Une telle commande est-elle viable en pratique? Intuitivement non et pour plusieurs raisons. D’une part, le modèle physique est une idéalisation de la réalité: le

FIG. 1.3 – *Commande boucle ouverte.*

coefficient de frottement dépend en fait de la nature locale de la route et sa valeur est de plus difficile à estimer avec précision. D'autre part, il s'agit d'un modèle simplifié qui ne prend pas en compte des facteurs secondaires comme le vent, les aspérités de la route, les variations du rendement moteur, etc. Incapable de détecter et donc de contrer les fluctuations liées à ces facteurs, la commande aveugle proposée ci-dessus n'a aucune chance d'assurer sa mission de régulation.

Au vu de cet exemple, il est clair que pour fonctionner correctement, un automatisme doit pouvoir réagir aux aléas externes et palier aux carences du modèle. Assurer cette faculté d'adaptation est précisément le rôle de la boucle d'asservissement. Son principe fonctionnel consiste simplement à :

- observer le résultat de la commande sur la sortie à l'aide de capteurs,
- comparer ce résultat à la valeur désirée pour cette sortie,
- agir pour contrer l'écart constaté.

Ce principe conduit au schéma bloc classique de la Figure 1.4. On notera la boucle de gain  $-1$  qui retourne la vitesse réelle  $V$  pour la comparer à la vitesse désirée  $V_0$ . L'écart enregistré  $e = V_0 - V$  est utilisé comme commande et l'action résultante tend bien à diminuer cet écart. En effet, on accélère ( $e > 0$ ) quand  $V < V_0$ , et on freine dans le cas contraire. Bien que la commande  $U = e$  évolue avec  $V$  et puisse donc être très complexe, la boucle se charge entièrement de la générer. On qualifie  $U$  de **commande boucle fermée**. On notera que la seule information à fournir à cet asservissement est la valeur cible  $V_0$ , plus communément appelée **consigne** ou **signal de référence**.

En résumé, la fonction essentielle d'un asservissement est d'assurer un certain comportement en sortie et ce en dépit des aléas externes et des imperfections du modèle. L'exemple donné ci-dessus est extrêmement rudimentaire puisqu'il consiste en un simple retour unité. En pratique, les caractéristiques du système et les propriétés requises en boucle fermée (stabilité, performance, etc...) exigent d'ajuster le gain de boucle, voire d'utiliser un retour dynamique. Ceci conduit aux configurations standard exposées ci-après.

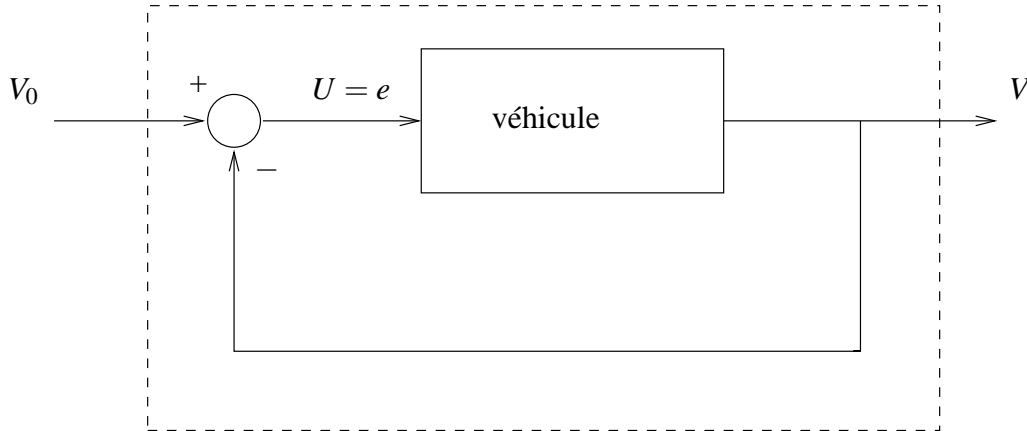


FIG. 1.4 – Commande boucle fermée.

### 1.3.2 Quelques configurations de boucle

Une boucle d’asservissement est habituellement décrite par un schéma bloc qui dresse le bilan des signaux circulant dans cette boucle. Le schéma standard d’une **boucle de suivi** apparaît en Figure 1.5. Le but est ici de faire suivre à la sortie  $y$  du système la trajectoire de référence  $r$ . La boucle comprend trois ingrédients principaux:

- le bloc “système”  $G$  (*plant*), qui représente le système à commander;
- le bloc “commande” ou **compensateur**  $K$  (*controller*). Son rôle est de générer les commandes à appliquer au système à partir des sorties observées et de signaux de référence;
- un comparateur qui calcule l’écart entre la sortie réelle et l’objectif de référence.

A cela s’ajoutent diverses perturbations externes qui interviennent en des points bien définis de la boucle. La nomenclature suivante est commune pour qualifier les différents signaux:

- $r(t)$  : consigne ou signal de référence (*reference*)
- $y(t)$  : signal de sortie ou réponse (*plant output*)
- $e(t)$  : erreur de suivi (*controller input/tracking error*)
- $u(t)$  : commande (*controller output*)
- $w_i(t)$  : perturbation de la commande (*plant input disturbance*)
- $w_o(t)$  : perturbation de la sortie (*plant output disturbance*)
- $n(t)$  : bruit de mesure (*measurement noise*)

Il existe de nombreuses variantes du schéma de la Figure 1.5. D’autres configurations équivalentes peuvent être jugées plus commodes ou explicites selon la

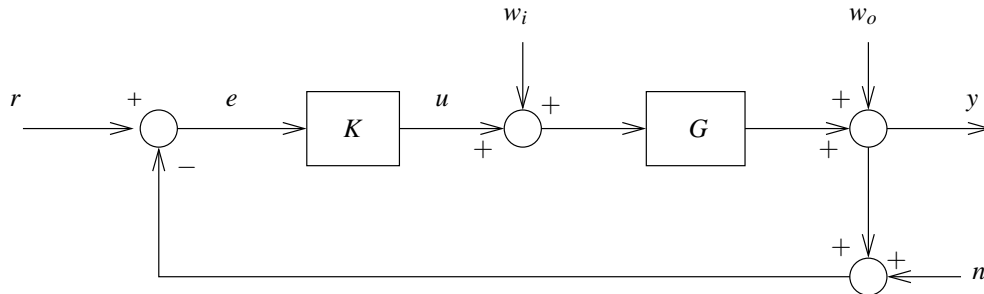


FIG. 1.5 – Boucle de suivi (tracking).

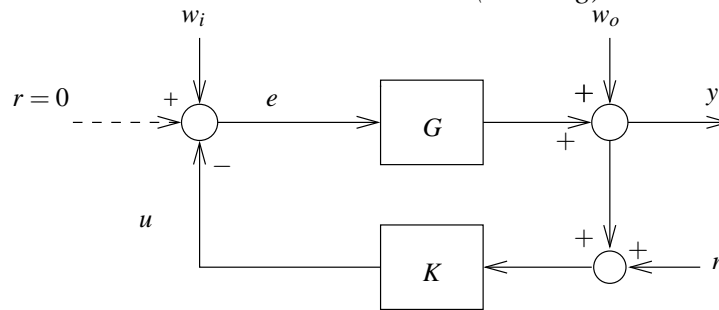


FIG. 1.6 – Boucle de régulation.

nature et la fonction de l'asservissement. Ainsi, les **boucles de régulation** sont souvent représentées par le schéma de la Figure 1.6. Rappelons que la régulation est un cas particulier du suivi où le signal de référence  $r$  est nul, c'est-à-dire on l'on désire maintenir  $y$  à zéro.

Le positionnement du bloc commande peut également varier pour mieux décrire la manière dont la commande est générée. Les différentes éventualités sont énumérées en Figure 1.7. On distingue la pré-compensation (*forward compensator*) de la compensation en retour (*return or feedback compensator*).

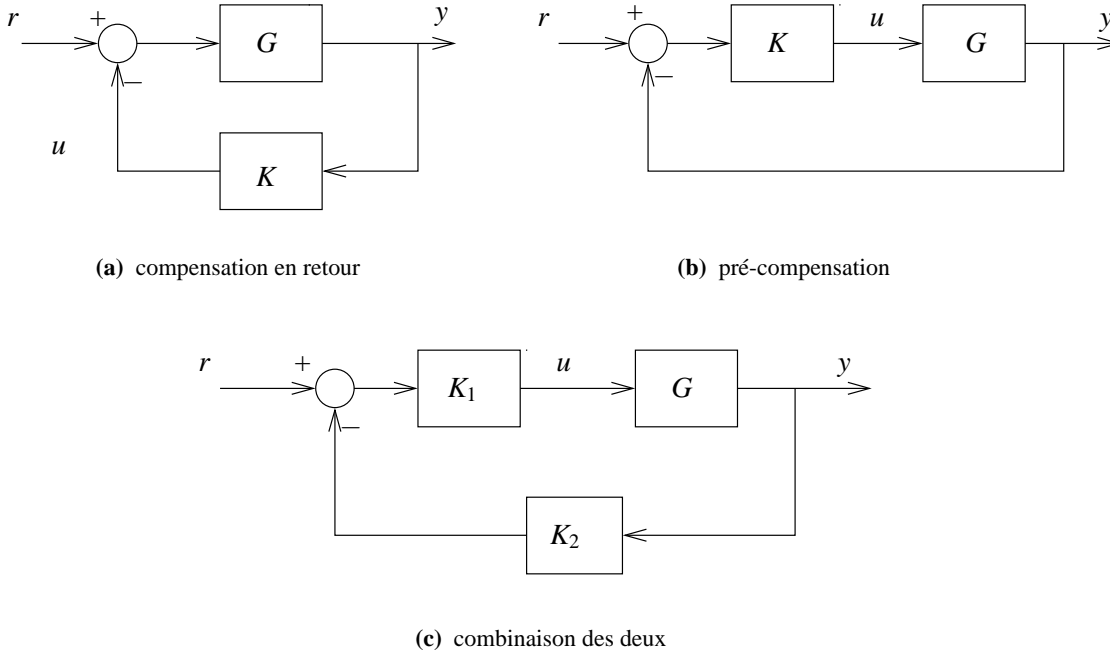


FIG. 1.7 – Différentes configurations de boucle.

Enfin, on peut modifier l'asservissement de la Figure 1.5 en ajoutant un bloc de pré-traitement du signal de référence  $r$ . La structure résultante est schématisée en Figure 1.8 et est généralement qualifiée de boucle à deux degrés de liberté, par opposition à la structure de la Figure 1.5 dite à un degré de liberté. Le supplément d'information fourni par le traitement indépendant de  $r$  permet généralement d'améliorer les performances de suivi de l'asservissement.

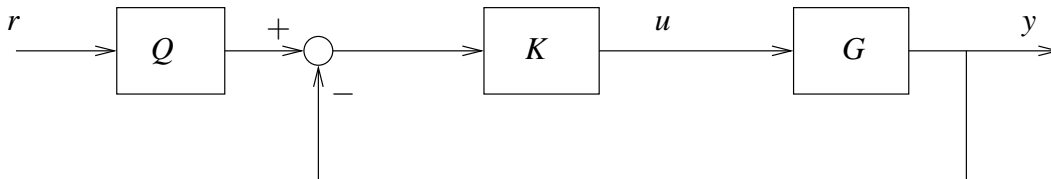


FIG. 1.8 – Asservissement à deux degrés de liberté.

### 1.3.3 Équations et Fonctions Caractéristiques

Considérons l'asservissement de la Figure 1.5 et supposons que le système et le compensateur sont linéaires. Si  $G(s)$  et  $K(s)$  dénotent leur fonction de transfert respective, le bilan des signaux dans la boucle donne les équations caractéristiques

suivantes:

$$Y = GK(I + GK)^{-1}(R - N) + (I + GK)^{-1}W_o + G(I + KG)^{-1}W_i \quad (1.21)$$

$$E = (I + GK)^{-1}(R - W_o - N) - G(I + KG)^{-1}W_i \quad (1.22)$$

$$U = K(I + GK)^{-1}(R - W_o - N) - KG(I + KG)^{-1}W_i. \quad (1.23)$$

où  $R(s), Y(s), \dots$  sont les transformées de Laplace des signaux  $r(t), y(t), \dots$

Ces équations mettent en valeur un certain nombre de fonctions de transfert caractéristiques de la boucle (*loop transfer functions*) qui vont jouer un rôle important dans l'étude et la synthèse des asservissements robustes. Ces fonctions sont:

- les **fonctions de transfert en boucle ouverte**  $GK(s)$  et  $KG(s)$  (*open-loop transfer functions*). Attention, elles ne coïncident pas en général dans le cas MIMO!
- la **fonction de sensibilité en sortie** (*output sensitivity function*):

$$S(s) = (I + G(s)K(s))^{-1}$$

qui indique la sensibilité de la sortie  $y$  aux perturbations  $w_o$  sur cette sortie, c'est-à-dire la façon dont  $w_o$  affecte  $y$ . Par défaut, le terme "fonction de sensibilité" fera implicitement référence à la fonction de sensibilité *en sortie*.

- la **fonction de sensibilité en entrée** (*input sensitivity function*):

$$\Sigma(s) = (I + K(s)G(s))^{-1}$$

qui indique la sensibilité de l'entrée  $u + w_i$  du système aux perturbations  $w_i$  affectant cette entrée.

- la **fonction de sensibilité complémentaire** (en sortie):

$$T(s) = G(s)K(s)(I + G(s)K(s))^{-1} = I - S(s).$$

Elle détermine la relation entre la sortie  $y$  et la consigne  $r$  (en termes de transformées de Laplace) ainsi que l'effet du bruit de mesure  $n$  sur la sortie  $y$ .

- la fonction  $G(s)(I + K(s)G(s))^{-1} = G\Sigma(s)$  qui exprime la sensibilité de la sortie  $y$  aux perturbations  $w_i$  de la commande  $u$ .
- la fonction  $K(s)(I + G(s)K(s))^{-1} = KS(s)$  qui détermine comment les perturbations du système  $w_o$  et le bruit de mesure  $n$  affectent la commande  $u$ .

D'autres interprétations de ces fonctions seront discutées plus loin au chapitre 2.

## 1.4 Propriétés des Asservissements

### 1.4.1 Stabilité

La stabilité est une exigence critique dans la conception d'un asservissement. Une perte de stabilité entraîne au mieux un comportement oscillatoire et donc une

incapacité à réguler ou poursuivre; au pire la génération de signaux de grande énergie qui vont endommager ou détruire le système.

Il convient de distinguer la **stabilité BIBO** (*bounded input/bounded output*) de la **stabilité interne**. La première notion s'intéresse seulement au comportement externe du système asservi et exige que l'énergie des signaux en sortie ( $y$ ) soit bornée dès que l'énergie fournie en entrée ( $r$ ) est bornée. La stabilité interne va plus loin et exige que tous les signaux circulant dans la boucle soient d'énergie finie. Cette seconde notion est donc plus restrictive et plus importante en pratique puisque les composants à l'intérieur de la boucle sont également sensibles aux énergies infinies.

En terme des fonctions de transfert caractéristiques, la stabilité BIBO correspond à la stabilité de  $T = GK(I + GK)^{-1}$ , c'est-à-dire au fait que  $T(s)$  a tous ses pôles dans le demi-plan ouvert gauche  $\Re(s) < 0$ . A noter que les pôles de  $T(s)$  sont les racines de l'équation

$$\det(I + G(s)K(s)) = 0. \quad (1.24)$$

Par contre, la stabilité interne requiert la stabilité des quatre fonctions de transfert  $S$ ,  $T$ ,  $KS$  et  $G(I + KG)^{-1}$ .

Pour caractériser la stabilité interne, il est plus commode de travailler sur les représentations d'état de  $G$  et  $K$ . Considérons en effet la boucle standard de la Figure 1.5 et introduisons les réalisations minimales suivantes de  $G(s)$  et  $K(s)$ :

$$G(s) = D_G + C_G(sI - A_G)^{-1}B_G; \quad K(s) = D_K + C_K(sI - A_K)^{-1}B_K. \quad (1.25)$$

Soient  $x_G$  et  $x_K$  les vecteurs d'état associés à ces réalisations. Les fonctions de transfert mentionnées ci-dessus peuvent s'écrire en terme de LFT comme suit:

$$(I + GK)^{-1} = \mathcal{F} \left( \begin{pmatrix} I & -G \\ I & -G \end{pmatrix}, K \right) \quad (1.26)$$

$$GK(I + GK)^{-1} = \mathcal{F} \left( \begin{pmatrix} 0 & G \\ I & -G \end{pmatrix}, K \right) \quad (1.27)$$

$$K(I + GK)^{-1} = \mathcal{F} \left( \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & -G \end{pmatrix}, K \right) \quad (1.28)$$

$$G(I + KG)^{-1} = \mathcal{F} \left( \begin{pmatrix} G & -G \\ G & -G \end{pmatrix}, K \right). \quad (1.29)$$

Une réalisation du premier argument de ces LFTs est facilement déduite de celle de  $G(s)$ . Par exemple,

$$\begin{pmatrix} I & -G \\ I & -G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & -D_G \\ I & -D_G \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_G \\ C_G \end{pmatrix} (sI - A_G)^{-1} (0, -B_G).$$

En utilisant les formules donnant la réalisation d'une LFT en fonction des réalisations des arguments (voir 2.2), il est facile de montrer que la stabilité (au sens des



fractions rationnelles) des quatre transferts ci-dessus est équivalente à la stabilité (au sens des matrices) de

$$A_{BF} = \begin{pmatrix} A_G - B_G(I + D_K D_G)^{-1} D_K C_G & -B_G(I + D_K D_G)^{-1} C_K \\ B_K(I + D_G D_K)^{-1} C_G & A_K - B_K(I + D_G D_K)^{-1} D_G C_K \end{pmatrix}. \quad (1.30)$$

Autrement dit, *la stabilité interne est complètement caractérisée par la stabilité de  $A_{BF}$ .*

On notera que  $A_{BF}$  est la matrice d'état du système bouclé, le vecteur d'état étant  $\begin{pmatrix} x_G \\ x_K \end{pmatrix}$ . Si la réalisation ainsi obtenue pour  $T(s)$  est minimale, la stabilité BIBO est équivalente à la stabilité interne. En cas de non-minimalité par contre, on peut avoir des modes instables cachés, c'est-à-dire absents du transfert entrée/sortie  $T(s)$ . Ceci se produit lorsqu'un pôle instable du système  $G(s)$  est simplifié par un zéro du compensateur  $K(s)$ . On a alors la stabilité BIBO sans la stabilité interne. Ce phénomène est illustré par l'exemple simple suivant.

**Exemple 1.4.1** Considérons le système  $G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$  et le compensateur  $K(s) = \frac{s}{s+1}$ . Le transfert consigne/sortie en boucle fermée est

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = T(s) = \frac{1}{1 + (s+1)^2}$$

qui est stable puisque ses pôles sont  $-1 \pm i$ . Cette boucle est donc BIBO stable. Par contre, elle n'est pas stable de façon interne. En effet,

$$\frac{G(s)}{1 + G(s)K(s)} = \frac{s+1}{s(1 + (s+1)^2)}$$

qui est visiblement instable à cause du pôle  $s = 0$ . On constate qu'il y a eu simplification de ce pôle de  $G$  par un zéro de  $K$ :

$$G(s)K(s) = \frac{1}{s(s+1)} \times \frac{s}{s+1} = \frac{1}{(s+1)^2}.$$

Il est donc dangereux d'analyser la stabilité au seul vu des pôles de  $S(s)$  ou  $T(s)$ , c'est-à-dire les racines de  $\det(I + G(s)K(s)) = 0$ . Pour un diagnostic fiable, il faut plutôt calculer le spectre de  $A_{BF}$  à partir de réalisations minimales de  $G$  et  $K$ . Observons enfin que dans le cadre linéaire, l'instabilité stricte (pôle dans  $Re(s) > 0$ ) conduit à des divergences exponentielles et donc à des signaux d'énergie infinie. Une telle évolution est bien sûr impossible physiquement. En pratique, on quitte rapidement la zone de linéarité pour se heurter aux saturations physiques, voire à la désagrégation du système! Le modèle linéaire est cependant suffisant pour révéler l'essentiel, à savoir que l'asservissement en question est inadéquat.

### 1.4.2 Performances

Un asservissement est performant s'il réagit rapidement et suit la consigne avec précision. Intuitivement, les performances sont d'autant meilleures que le gain de boucle est élevé: le moindre écart à la consigne entraîne alors une réaction véhémente pour le compenser. Mathématiquement, cette tendance est exprimée dans la relation

$$E(s) = (I + GK)^{-1}R(s)$$

entre l'erreur de suivi  $E$  et la consigne  $R$ . Dans le cas d'une consigne sinusoïdale  $r(t) = \sin(\omega t)$  par exemple, la moyenne quadratique de l'erreur sur une période  $T = 2\pi/\omega$  est donné par

$$\int_0^T e^2(t)dt = |(1 + GK(j\omega))^{-1}| \int_0^T r^2(t)dt = \frac{\pi}{|1 + GK(j\omega)|}.$$

On voit que cette erreur sera d'autant plus petite que le gain de boucle à la fréquence  $\omega$  ( $|GK(j\omega)|$ ) est élevé. Augmenter le gain de boucle confère en outre certaines propriétés intéressantes à l'asservissement. Il faut cependant se méfier du mirage des grands gains: ils sont rarement utilisables en pratique à cause des saturations et surtout pour des questions de robustesse (voir section 1.5).

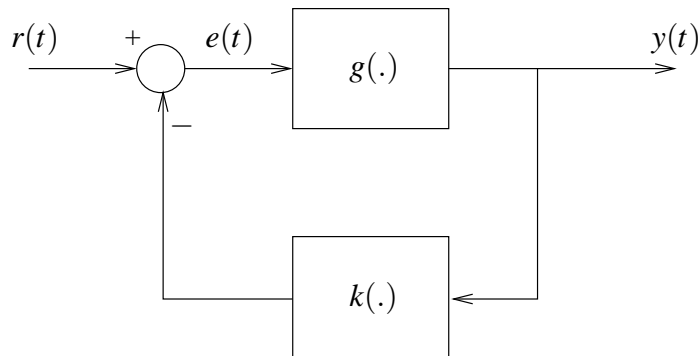


FIG. 1.9 – Asservissement type.

Pour mieux analyser l'effet des grands gains, considérons la boucle d'asservissement de la Figure 1.9. Ici les fonctions de comportement  $g$  et  $k$  du système et du compensateur ne sont pas nécessairement linéaires. On suppose seulement que l'équation de la boucle

$$e + k(g(e)) = r \tag{1.31}$$

est toujours soluble pour l'erreur  $e$  (à chaque instant  $t$ ). On appelle **gain de boucle** ou **gain en boucle ouverte** le module de la fonction

$$\theta = k \circ g. \tag{1.32}$$

L'effet principal des grands gains est de forcer la sortie  $y$  à se comporter comme la fonction  $k^{-1}(r)$ . En effet, si l'on a

$$\|\theta(e)\| \geq \gamma \|e\| \text{ avec } \gamma \gg 1, \quad (1.33)$$

on obtient à partir de (1.31)

$$\gamma \|e\| \leq \|r - e\| \leq \|r\| + \|e\|$$

d'où

$$\|e\| \leq \frac{\|r\|}{\gamma - 1}. \quad (1.34)$$

En observant que  $y = g(e)$ , (1.31) donne également:

$$\|r - k(y)\| = \|e\| \leq \frac{\|r\|}{\gamma - 1}. \quad (1.35)$$

Il est clair que si le gain de boucle est élevé ( $\gamma \gg 1$ ), l'erreur sera petite d'après (1.34) et l'on aura  $r \approx k(y)$  d'après (1.35), c'est-à-dire

$$y \approx k^{-1}(r). \quad (1.36)$$

Les implications de ce phénomène sont multiples. D'une part, on voit que la relation entrée/sortie  $y = f(r)$  ne dépend pratiquement plus du comportement  $g$  du système. De fait, on peut se contenter d'une connaissance très sommaire de ce système. De plus, la boucle se comporte essentiellement comme  $k^{-1}$  sur lequel on a tout contrôle. En particulier, on peut choisir  $k$  linéaire et ainsi forcer un système quelconque à se comporter approximativement de façon linéaire. On peut aussi fixer arbitrairement la bande passante du système. Ces propriétés des grands gains sont illustrées par un exemple.

**Exemple 1.4.2** Considérons le système non linéaire  $g(x) = x + x^2$  asservi par la boucle de suivi de la Figure 1.10. En boucle ouverte ( $k = 1$  et non rebouclé), la relation consigne/sortie est

$$y = r + r^2. \quad (1.37)$$

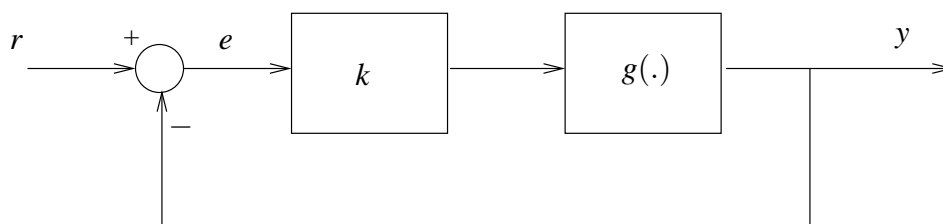
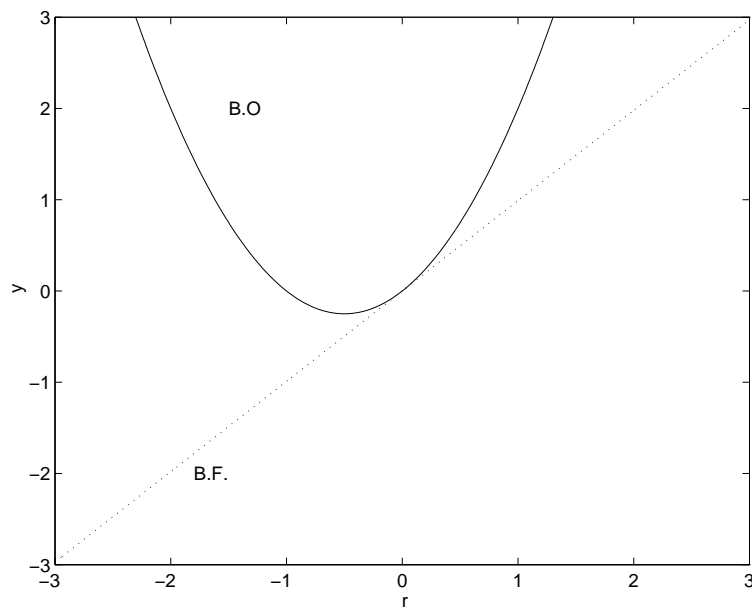
Le suivi n'est donc bon que pour  $r$  petit et la caractéristique est non linéaire. Si l'on ferme à présent la boucle avec un grand gain ( $k \gg 1$ ), on obtient

$$e \approx \frac{r}{1+k}$$

et

$$y \approx k \left( \frac{r}{1+k} + \frac{r^2}{(1+k)^2} \right) \approx \frac{k}{1+k} r. \quad (1.38)$$

Les comportements boucle ouverte (1.37) et boucle fermée (1.38) sont comparés sur le graphe de la Figure 1.11 pour  $k = 100$ . Le gain en linéarité est évident.

FIG. 1.10 – *Boucle de suivi.*FIG. 1.11 – *Caractéristiques B.O. et B.F.*

Dans le cas linéaire, les performances peuvent s'analyser à partir des fonctions de transfert caractéristiques de la boucle. Considérons à nouveau la boucle standard de la Figure 1.5. Dans le domaine fréquentiel, le transfert entre la consigne  $R(s)$  et la sortie  $Y(s)$  est donné par la fonction de sensibilité complémentaire

$$T = GK(I + GK)^{-1}. \quad (1.39)$$

L'asservissement sera performant dans la bande de fréquence  $[\omega_1, \omega_2]$  si  $T(j\omega) \approx I$  dans cette bande. Ceci requiert typiquement un gain de boucle élevé dans cette bande, c'est-à-dire

$$\sigma_{\min}(G(j\omega)K(j\omega)) \gg 1, \quad \forall \omega \in [\omega_1, \omega_2]. \quad (1.40)$$

En effet, on a alors

$$\begin{aligned} \sigma_{\max}(I - T(j\omega)) &= \sigma_{\max}((I + GK(j\omega))^{-1}) = \frac{1}{\sigma_{\min}(I + GK(j\omega))} \\ &\approx \frac{1}{\sigma_{\min}(GK(j\omega))} \ll 1. \end{aligned}$$

On notera la dépendance fréquentielle de la notion de performance; si (1.40) n'est vérifiée que dans la bande  $[\omega_1, \omega_2]$ , le suivi sera bon uniquement pour les consignes  $r$  dont la puissance spectrale est concentrée dans cette bande. Dans le cas MIMO, l'aspect directionnel peut également intervenir; ainsi, on pourra exiger des performances pour certains canaux entrée/sortie et une atténuation pour d'autres.

### 1.4.3 Bande passante

La bande passante d'une fonction de transfert scalaire  $G(s)$  est l'ensemble des fréquences  $\omega$  pour lesquelles

$$|G(j\omega)| > 1.$$

La (ou les) fréquence de coupure  $\omega_c$  est caractérisée par:

$$|G(j\omega_c)| = 1.$$

Pour un asservissement, la bande passante est liée à la réponse en boucle ouverte  $G(s)K(s)$ . Dans le cas SISO, elle correspond aux fréquences pour lesquelles le gain  $|G(j\omega)K(j\omega)|$  est plus grand que 1. Dans le cas MIMO, elle dépend de quelle pair entrée/sortie est considérée. S'il s'agit de la bande passante "minimale", elle est caractérisée par

$$\sigma_{\min}(G(j\omega)K(j\omega)) > 1.$$

La bande passante détermine quel registre de signaux l'asservissement est capable de suivre ou de contrer. Plus elle est étendue, plus l'asservissement est capable de réagir à des variations rapides (excitations haute fréquence). Autrement dit, la bande passante mesure la zone de fonctionnement de l'asservissement.

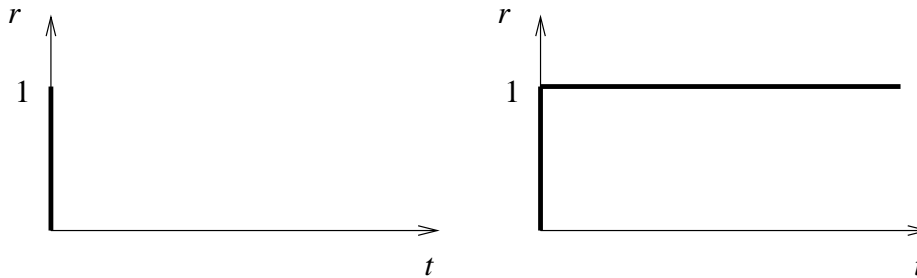
### 1.4.4 Réponse temporelle

Un autre aspect important des systèmes asservis est la réponse temporelle, c'est-à-dire les caractéristiques du régime transitoire avant établissement autour de la consigne. Les consignes ou excitations test sont typiquement (voir Figure 1.12):

- l'impulsion  $r(t) = \delta(t)$ ,
- les échelons

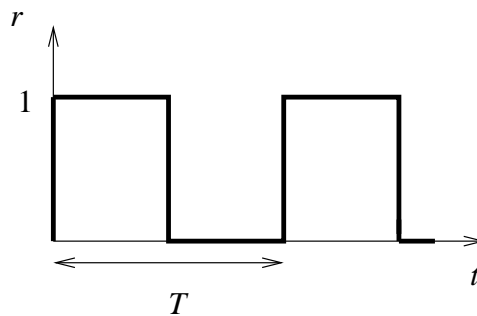
$$r(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases},$$

- les créneaux.



(a): impulsion

(b): échelon



(c): créneau

FIG. 1.12 – Excitations types pour évaluer la réponse temporelle.

Les transformées de Laplace de ces signaux sont respectivement

$$R(s) = 1; \quad R(s) = \frac{1}{s}; \quad R(s) = \frac{1}{s} \frac{1 - e^{-sT}}{1 - e^{-s}} = \frac{1}{s} \frac{1}{1 + e^{-sT/2}}. \quad (1.41)$$

Le comportement transitoire est souvent analysé sur la réponse à un échelon (*step response*). On s'intéresse aux caractéristiques suivantes (voir Figure 1.13):

- temps de montée (*rise time*): le temps nécessaire pour atteindre 90% de la

valeur finale;

- temps de réponse (*settling time*): le temps nécessaire pour se stabiliser dans une bande  $\pm 5\%$  autour de la valeur finale;
- dépassement maximal (*maximum overshoot*): plus grand dépassement de la réponse au dessus de la valeur finale.

Ces grandeurs reflètent la qualité du transitoire. On recherche à minimiser le temps de montée et de réponse (rapidité) tout en maintenant un faible dépassement.

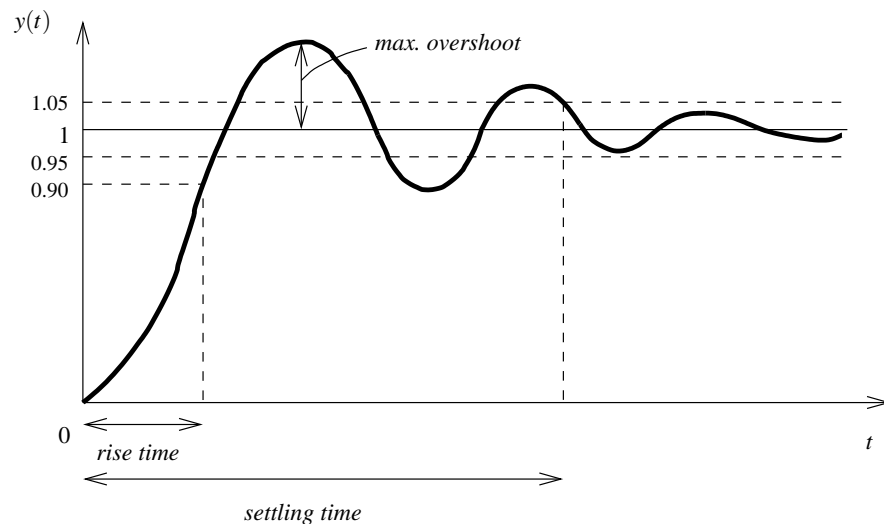


FIG. 1.13 – Caractéristiques de la réponse à un échelon.

### 1.4.5 Outils d'analyse des asservissements

L'Automatique Classique a développé des outils graphiques pour analyser les propriétés d'un asservissement. Bien qu'essentiellement limités aux systèmes SISO, ces outils s'appliquent parfois au cas MIMO.

#### Diagramme de Bode

Le diagramme de Bode d'une fonction de transfert scalaire  $G(s)$  donne le gain  $|G(j\omega)|$  et la phase  $Arg(G(j\omega))$  en fonction de la fréquence  $\omega$ . L'axe des gains est gradué en dB avec la définition:

$$X \text{ en dB} = 20\log_{10}(X).$$

L'axe des  $\omega$  est en échelle logarithmique à base 10. Une décade correspond à une unité de cette échelle.

**Exemple 1.4.3** Le diagramme de Bode de la fonction de transfert

$$G(s) = \frac{(s+1)(s+3)}{(s+2)(s+4)(s+6)} \quad (1.42)$$

est représenté en Figure 1.14.

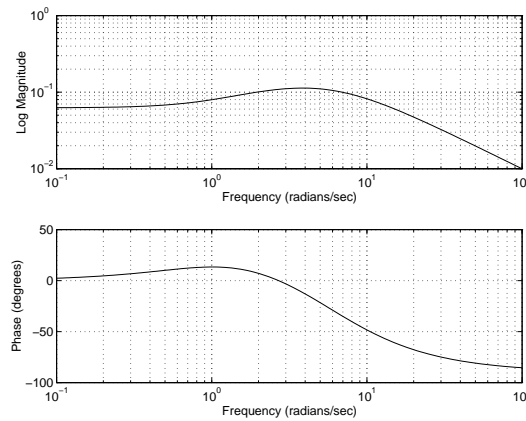


FIG. 1.14 – *Diagramme de Bode.*

### Diagramme des valeurs singulières

Le diagramme des valeurs singulières est une généralisation du diagramme de gain de Bode pour les systèmes MIMO. Etant donnée une fonction de transfert  $G(s) \in \mathbb{C}^{m \times n}$ , ce diagramme trace les courbes

$$\sigma_i(G(j\omega)), \quad i = 1, \dots, \min(m, n)$$

où  $\sigma_i$  dénote la  $i$ -ième valeur singulière. Rappelons que la plus grande valeur singulière est une norme et correspond au gain maximal. A noter aussi qu'il n'y a pas d'équivalent naturel de la phase pour les systèmes multivariables. Les valeurs singulières permettent de visualiser les bandes passantes et les bandes atténuées du système. Elles jouent donc un rôle très important pour définir les performances, la stabilité et la robustesse d'un système.

**Exemple 1.4.4** Le diagramme des valeurs singulières du système de réalisation

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 100 \\ -100 & -1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0.8 \end{pmatrix}; \quad C = I_2$$



est tracé en Figure 1.15. La plus grande valeur singulière  $\sigma_{max}(G(j\omega))$  comporte une résonance alors que la plus petite n'en a pas.

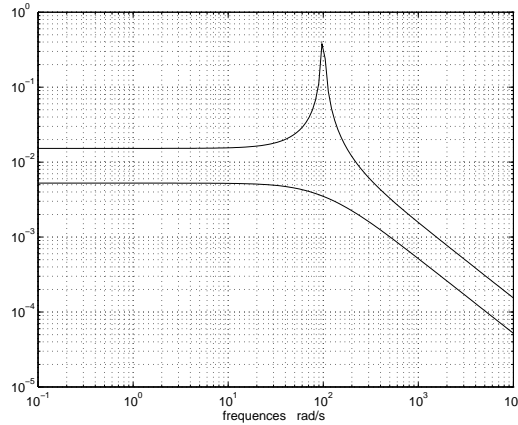


FIG. 1.15 – *Diagramme des valeurs singulières.*

### Diagramme de Nyquist

Le **diagramme de Nyquist** représente la fonction  $G(j\omega)$  dans le plan complexe. A chaque fréquence  $\omega$  on associe le point de coordonnées  $\Re(G(j\omega))$  et  $\text{Im}(G(j\omega))$ . Le contour de Nyquist est la courbe formée par ces points. Il est orienté dans le sens des  $\omega$  croissants de  $-\infty$  à  $+\infty$ .

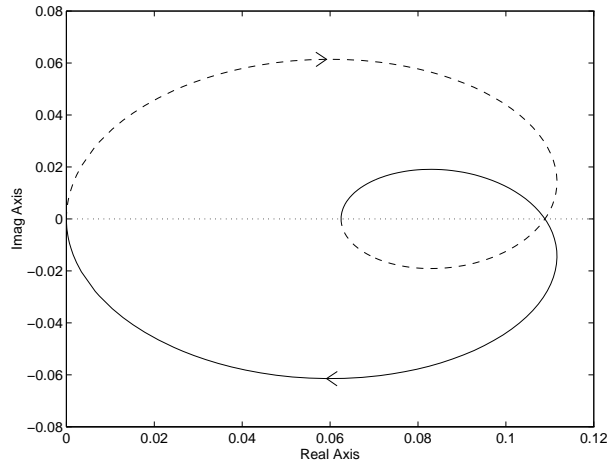
**Exemple 1.4.5** Le contour de Nyquist de la fonction de transfert définie en (1.42) est représenté en Figure 1.16.

Le tracé de Nyquist joue un rôle important dans l'analyse de la stabilité en boucle fermée d'un asservissement. Il s'agit ici de la stabilité BIBO puisqu'on s'intéresse à la stabilité de la fonction de transfert

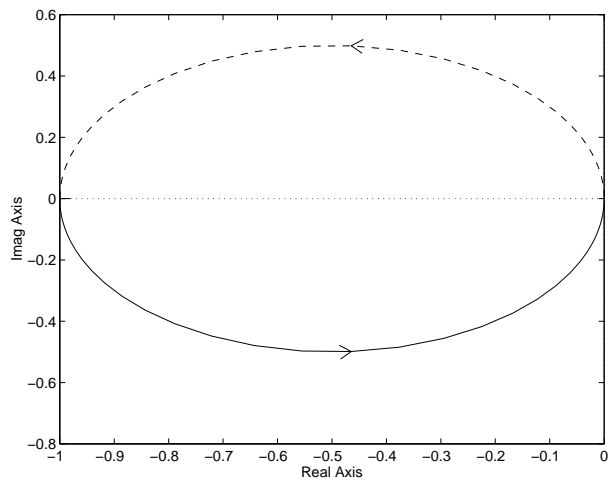
$$S(s) = \frac{1}{1 + G(s)K(s)} = I - T(s).$$

Le critère de Nyquist fournit un moyen graphique simple pour étudier la stabilité de  $S(s)$  à partir du seul tracé de Nyquist du transfert en boucle ouverte  $F(s) = G(s)K(s)$ . Ce critère s'applique dès que  $F(s)$  n'a pas de pôle sur l'axe imaginaire et peut s'énoncer comme suit.

**Critère de Nyquist:** le système bouclé est BIBO stable si et seulement si le contour de Nyquist de  $F(s) = G(s)K(s)$  parcouru de  $\omega = -\infty$  à  $\omega = +\infty$  entoure le point critique  $(-1,0)$  un nombre de fois égal au nombre de pôles instables de  $F(s)$ .

FIG. 1.16 – *Contour de Nyquist.*

**Exemple 1.4.6** Considérons le système  $G(s) = \frac{1}{s-1}$  bouclé par le compensateur proportionnel  $K(s) = +2$ . Le contour de Nyquist de  $F(s) = G(s)K(s) = \frac{2}{s-1}$  apparaît en trait plein sur la Figure 1.17. Parcouru suivant les  $\omega$  croissants, ce contour entoure une seule fois le point critique. Puisque  $F(s)$  a un pôle instable, on en conclut que la boucle fermée est BIBO stable.

FIG. 1.17 – *Critère de Nyquist.*

### Diagramme de Black

Dernier diagramme souvent utilisé en Automatique: le **lieu de Black** (ou diagramme de **Nichols**). Ici la phase  $\text{Arg}(G(j\omega))$  est portée en abscisses (en degrés) et

le gain  $|G(j\omega)|$  est porté en ordonnées (en dB). La courbe des points  $G(j\omega)$  ainsi obtenue représente la réponse fréquentielle. Le diagramme de Black s'utilise pour déterminer le gain et la phase du transfert consigne/sortie

$$T(s) = \frac{G(s)K(s)}{1 + G(s)K(s)}$$

à partir du tracé du transfert en boucle ouverte  $F(s) = G(s)K(s)$ . Les abaques de Black permettent de lire directement cette information en chaque point du tracé de  $F(s)$  sur le lieu de Black.

**Exemple 1.4.7** Le lieu de Black pour l'exemple précédent est tracé en Figure 1.18. Ce lieu tangente le cercle de gain constant 6 dB ( $|G(j\omega)| = 2$ ) à la fréquence  $\omega = 0$ .

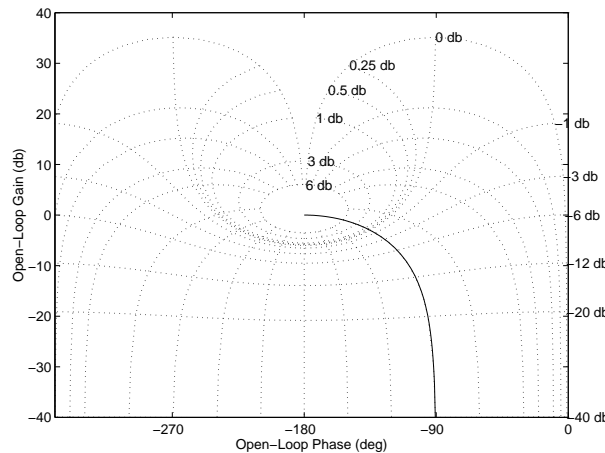


FIG. 1.18 – Lieu de Black.

## 1.5 Ingrédients pour un Asservissement Robuste

La conception d'un asservissement consiste à ajuster la fonction de transfert  $K(s)$  du compensateur de manière à obtenir les propriétés et le comportement désirés en boucle fermée. Outre la contrainte de stabilité, on recherche typiquement les meilleures performances possibles. Cette tâche est compliquée par deux difficultés principales. D'une part, la conception s'exécute sur un modèle idéalisé du système. Il faut donc assurer la "robustesse" aux imperfections de ce modèle, c'est-à-dire garantir les propriétés désirées pour toute une famille de systèmes autour du modèle de référence. D'autre part, on se heurte à des limitations intrinsèques comme le compromis entre performances et robustesse.

Cette section montre comment ces objectifs et contraintes peuvent être formulées et quantifiées dans un cadre homogène favorable à leur prise en compte systématique.

### 1.5.1 Robustesse à l'incertitude

La conception d'un asservissement s'effectue à partir d'un modèle du système réel souvent appelé **modèle nominal** ou **modèle de référence**. Ce modèle peut provenir des équations de la physique ou d'un processus d'identification où la réponse fréquentielle est mesurée par un transféromètre. En tout cas, ce modèle n'est qu'une approximation de la réalité. Ses carences peuvent être multiples: dynamiques et nonlinéarités négligées, incertitude sur certains paramètres physiques, hypothèses simplificatrices, erreurs de mesure à l'identification, etc. De plus, certains paramètres du système peuvent varier sensiblement avec le temps ou les conditions de fonctionnement. Enfin, des facteurs externes imprévisibles peuvent venir perturber le fonctionnement du système asservi.

Il est donc insuffisant d'optimiser l'asservissement par rapport au modèle nominal: il faut aussi se prémunir contre l'incertitude de modélisation et les aléas externes. Bien que ces facteurs soient par essence mal connus, on dispose en général d'informations sur leur amplitude maximale ou leur nature statistique. Par exemple, la fréquence de la houle, l'intensité maximale du vent, ou des bornes min et max sur la valeur d'un paramètre. C'est à partir de cette connaissance sommaire qu'on va tenter de "robustifier" l'asservissement.

On distingue deux classes de facteurs incertains. Une première classe comprend les aléas et perturbations externes. Ce sont des signaux ou actions à caractère aléatoire qui viennent perturber le système asservi. On les identifie en fonction de leur point d'entrée dans la boucle. En se référant à nouveau à la Figure 1.5, il y a essentiellement:

- les perturbations de la commande  $w_i$  qui peuvent provenir d'erreurs de discrétisation ou de quantification de la commande ou d'actions parasites sur les actionneurs.
- Les perturbations en sortie  $w_o$  qui correspondent à des actions extérieures secondaires ou imprévisibles sur le système; par exemple, le vent pour un avion, un changement de pression atmosphérique pour un réacteur chimique, etc.
- Les bruits de mesure  $n$  au niveau des capteurs qui corrompent l'estimation de la valeur courante de la sortie  $y$ .

A noter que ces actions externes ne modifient pas le comportement dynamique interne du système, mais seulement la "trajectoire" de ses sorties.

Une deuxième classe de facteurs incertains réunit les imperfections et variations du modèle dynamique du système. Rappelons que les techniques de commande robuste s'appliquent à des modèles linéaires de dimension finie alors que les systèmes réels sont généralement non-linéaires et de dimension infinie. Typiquement, le modèle utilisé néglige donc les non-linéarités et n'est valable que dans une bande de fréquence limitée. Il dépend de plus de paramètres physiques dont la va-

leur peut fluctuer et n'est souvent connue qu'approximativement. Pour des raisons pratiques, on distinguera :

- l'**incertitude non structurée** ou **incertitude dynamique** qui rassemble les dynamiques négligées dans le modèle. On ne dispose en général que d'une borne supérieure sur l'amplitude de ces dynamiques. On doit donc assumer et se prémunir contre le pire des cas dans la limite de cette borne.
- L'**incertitude paramétrique** ou **structurée** qui est liée aux variations ou erreurs d'estimation sur certains paramètres physiques du système, ou à des incertitudes de nature dynamique, mais entrant dans la boucle en différents points. L'incertitude paramétrique intervient principalement lorsque le modèle est obtenu à partir des équations de la physique. La manière dont les paramètres influent sur le comportement du système détermine la "structure" de l'incertitude. Différents outils pour appréhender ce type d'incertitudes seront développés au chapitre 3.

### 1.5.2 Représentation de l'incertitude de modélisation

L'incertitude dynamique (non structurée) peut englober des phénomènes physiquement très divers (linéaires ou non-linéaires, stationnaires ou temps-variants, frottements, hystérésis, etc.) Les techniques étudiées dans ces notes sont particulièrement pertinentes lorsqu'on ne dispose d'aucune information spécifique sinon une estimation de l'amplitude maximale de l'incertitude dynamique. En d'autres termes, lorsque l'incertitude est raisonnablement modélisée par une boule dans l'espace des opérateurs bornés de  $\ell_2$  dans  $\ell_2$ .

Un tel modèle est bien sûr très grossier et tend à inclure des configurations dépourvues de sens physique. Si le système réel ne comporte pas de nonlinéarités importantes, il est souvent préférable de se restreindre à un modèle purement linéaire stationnaire de l'incertitude dynamique. On peut alors pondérer le degré d'incertitude en fonction de la fréquence et traduire le fait que le système est mieux connu en basse qu'en haute fréquence. L'incertitude est alors représentée comme un système LTI perturbateur  $\Delta G(s)$  qui s'ajoute au modèle nominal  $G(s)$  du système réel :

$$G_{\text{réel}}(s) = G(s) + \Delta G(s). \quad (1.43)$$

Ce système doit être BIBO-stable (borné de  $\ell_2$  dans  $\ell_2$ ), et on dispose en général d'une estimation de l'amplitude maximale de  $\Delta G(j\omega)$  dans chaque bande de fréquence. Typiquement, cette amplitude est faible aux basses fréquences et croît rapidement dans les hautes fréquences où les dynamiques négligées deviennent prépondérantes. Ce profil est illustré en Figure 1.19. Il définit une famille de systèmes dont l'enveloppe sur le diagramme de Nyquist est représentée en Figure 1.20 (cas SISO). Le rayon du disque d'incertitude à la fréquence  $\omega$  est  $|\Delta G(j\omega)|$ .

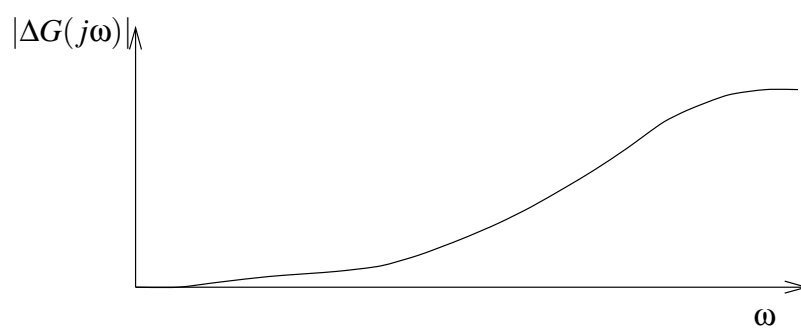


FIG. 1.19 – Profil type pour  $|\Delta G(j\omega)|$ .

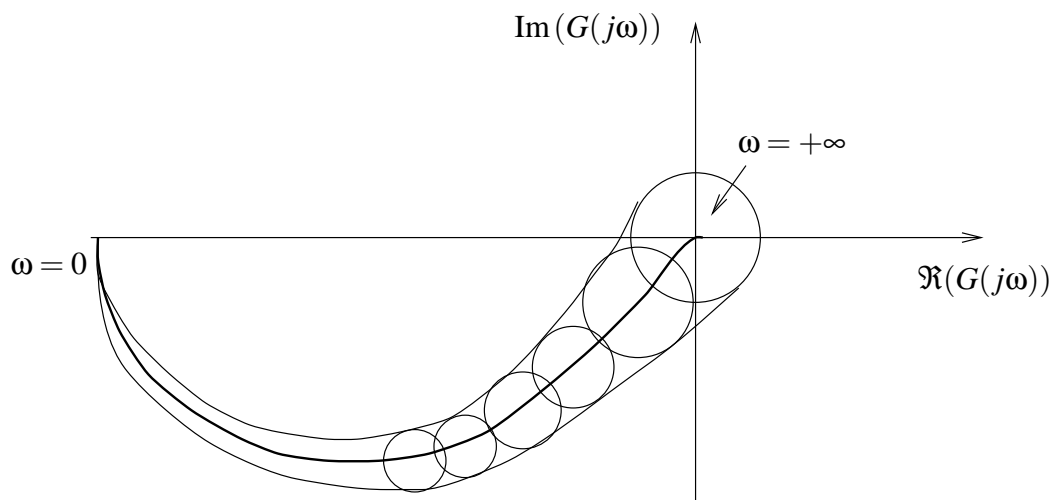


FIG. 1.20 – Famille de systèmes.

L'information sur l'amplitude  $|\Delta G(j\omega)|$  de l'incertitude peut être quantifiée de plusieurs manières:

- **incertitude additive** : le système réel est de la forme:

$$G_{\text{réel}}(s) = G(s) + \Delta(s) \quad (1.44)$$

où  $\Delta(s)$  est une fonction de transfert stable qui vérifie:

$$\|W_l(\omega)\Delta(j\omega)W_r(\omega)\|_\infty < 1 \quad (1.45)$$

pour certains gabarits  $W_l(s)$  et  $W_r(s)$ . Ces gabarits, aussi appelés matrices de pondération, permettent d'incorporer l'information sur la dépendance fréquentielle et directionnelle de l'amplitude maximale de  $\Delta(s)$  (voir valeurs singulières).

- **incertitude multiplicative à l'entrée**: le système réel est de la forme:

$$G_{\text{réel}}(s) = G(s) (I + \Delta(s)) \quad (1.46)$$

où  $\Delta(s)$  est comme ci-dessus. Cette représentation modélise des erreurs ou fluctuations sur le comportement en entrée.

- **incertitude multiplicative en sortie**: le système réel est de la forme:

$$G_{\text{réel}}(s) = (I + \Delta(s)) G(s) \quad (1.47)$$

Cette représentation est adaptée à la modélisation des erreurs ou fluctuations sur le comportement en sortie.

En fonction des données sur les imperfections du modèle, on choisira plutôt l'une ou l'autre de ces représentations. Notons que l'incertitude multiplicative a un caractère relatif.

L'incertitude paramétrique est plus difficile à représenter et à prendre en compte. Elle sera abordée en détail au chapitre 3.

### 1.5.3 Stabilité robuste

La stabilité en boucle fermée est sensible aux erreurs de modélisation du système ( $\Delta G(s)$ ) et aux dérives de la commande ( $\Delta K(s)$ ). Assurer la stabilité du modèle nominal bouclé n'est donc pas suffisant. Il faut également garantir la stabilité de tous les systèmes atteignables par les perturbations  $\Delta G$  et  $\Delta K$  admissibles, parmi lesquels se trouve le système réel lui-même. La stabilité est dite "robuste" lorsque cette garantie supplémentaire est fournie.

Dans cette section, on se restreint à des incertitudes non structurées  $\Delta G$  et  $\Delta K$ . Un résultat instrumental pour la stabilité robuste est le Théorème des Petits Gains (*Small Gain Theorem*) dont nous présentons deux versions.

**Théorème 1.5.1 (Théorème des Petits Gains, 1ère version)**

Considérons la boucle d'asservissement de la Figure 1.21 où  $L$  est un système BIBO stable quelconque (opérateur de  $\ell_2$  dans  $\ell_2$ ).

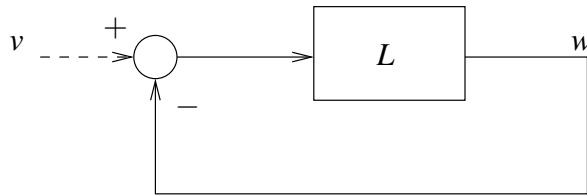


FIG. 1.21 – Théorème des Petits Gains

Une condition **suffisante** pour la stabilité interne de cette boucle est que  $L$  soit une contraction, c'est-à-dire que

$$\forall u, v \in \ell_2, \|L(u) - L(v)\|_2 \leq \alpha \|u - v\|_2$$

avec  $0 \leq \alpha < 1$  (ici  $\|\cdot\|_2$  dénote la norme naturelle des signaux de  $\ell_2$ ).

Si  $L$  est linéaire, cette condition se réduit à  $\|L\|_\infty < 1$ .

**Justification:** Ce résultat repose sur le Théorème du point fixe dans les espaces de Banach, l'espace étant ici  $\ell_2$ . Pour montrer que la sortie  $w$  est dans  $\ell_2$  dès que l'entrée  $v \in \ell_2$ , on considère l'équation fonctionnelle de la boucle (d'inconnue  $w$ ):

$$w = L(v - w)$$

ou de manière équivalente après le changement de variable  $z = v - w$ :

$$z = v - L(z). \quad (1.48)$$

Comme  $L$ , l'opérateur  $z \mapsto v - L(z)$  est une contraction de  $\ell_2$  et admet donc un point fixe, i.e., une solution  $z \in \ell_2$  de (1.48). On en déduit immédiatement que  $w = v - z \in \ell_2$ .

Le même raisonnement s'applique pour des signaux entrant aux autres points de la boucle (i.e., avant et après  $L$ ), d'où stabilité interne. Une preuve plus détaillée se trouve dans [8].

Le Théorème des Petits Gains montre qu'un gain de boucle inférieur à 1 garantit la stabilité interne en boucle fermée indépendamment de la nature de  $L$ . Bien



évidemment il ne s'agit que d'une condition **suffisante**. Les implications pour le problème de stabilité robuste face à de l'incertitude dynamique sont développées dans le corollaire suivant. Notons qu'une généralisation de ce théorème sera présentée au chapitre 3 sur la  $\mu$  analyse.

**Théorème 1.5.2 (Théorème des Petits Gains, 2ème version)**

Considérons la boucle d'asservissement de la Figure 1.22 où le système nominal  $P(s)$  est un système linéaire stationnaire stable et l'incertitude non structurée  $\Delta(\cdot)$  est un opérateur de  $\ell_2$  vérifiant:

$$\forall u, v \in \ell_2, \|\Delta(u) - \Delta(v)\|_2 \leq \alpha \|u - v\|_2 \quad (1.49)$$

avec  $0 \leq \alpha \leq 1$ .

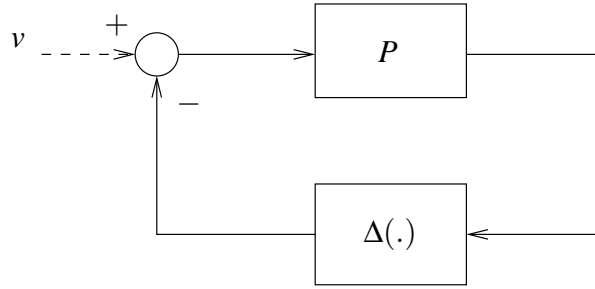


FIG. 1.22 – Théorème des Petits Gains: stabilité robuste

Cette boucle est stable de façon interne pour tout  $\Delta$  satisfaisant (1.49) si et seulement si

$$\|P\|_\infty < 1,$$

et ce résultat reste valable lorsque l'incertitude  $\Delta$  est restreinte à l'espace des systèmes linéaires stationnaires stables  $\Delta(s)$  de norme  $\|\Delta(s)\|_\infty \leq 1$ .

**Justification:** La condition  $\|P\|_\infty < 1$  est clairement suffisante puisqu'alors  $L = \Delta \circ P$  est une contraction et la première version du théorème s'applique.

Réciproquement, il suffit de montrer la nécessité lorsque  $\Delta$  est LTI, stable, et de norme  $H_\infty$  inférieure à 1 (cas particulier des contractions de  $\ell_2$ ). Supposons que  $\beta = \|P\|_\infty \geq 1$  et introduisons la fréquence  $\omega$  pour laquelle ce gain est atteint, i.e.,

$$P(j\omega)u = \beta v$$

pour  $u, v$  vecteurs unitaires. Puisque  $1/\beta \leq 1$ , on peut toujours construire  $\Delta(s)$  stable vérifiant  $\|\Delta(s)\|_\infty \leq 1$  et

$$\Delta(j\omega)v = -(1/\beta)u.$$

On a alors  $(I + \Delta.P(j\omega))u = 0$  et la matrice  $I + \Delta.P(j\omega)$  est singulière. Par conséquent, la boucle fermée n'est pas stable puisque:

$$\|S\|_{\infty} = \|(I + \Delta(s)P(s))^{-1}\|_{\infty} = +\infty.$$

Ce résultat s'applique directement au problème de stabilité robuste de la boucle de suivi de la Figure 1.5. Prenons le cas d'une incertitude additive sur le modèle  $G(s)$  (voir (1.43)) et supposons que cette incertitude est bornée en fonction de la fréquence par:

$$\sigma_{\max}(\Delta(j\omega)) \leq w_a(\omega) \quad (\forall \omega \in \mathbb{R}). \quad (1.50)$$

Un profil typique de la fonction majorante  $w_a(\omega)$  est représenté en Figure 1.19. Supposons de plus que le système nominal est stable en boucle fermée, i.e., que  $S(s) = (I + GK(s))^{-1}$  est stable et qu'il n'y a pas de simplification instable. Pour appliquer le Théorème 1.5.2, il suffit de réécrire la boucle fermée de la Figure 1.23 sous la forme de la Figure 1.22. Le bilan des signaux est

$$y = q + Gu; \quad u = -Ky; \quad q = \Delta u$$

soit après élimination de  $y$ :

$$u = -(I + KG)^{-1}Kq; \quad q = \Delta u.$$

Ces équations correspondent à la boucle de la Figure 1.22 avec  $P(s) = (I + KG(s))^{-1}K(s) = K(s)(I + GK(s))^{-1}$ . Pour appliquer le théorème, on doit enfin normaliser  $\Delta(s)$  en remplaçant  $P$  et  $\Delta$  par  $w_a P$  et  $\Delta/w_a$  (qui devient alors arbitraire dans la boucle  $\|X\|_{\infty} < 1$ ). On peut à présent conclure que la stabilité en boucle fermée sera préservée pour toute erreur additive de modélisation  $\Delta(s)$  stable et vérifiant (1.50) **si et seulement si**

$$\|w_a K(I + GK)^{-1}\|_{\infty} < 1. \quad (1.51)$$

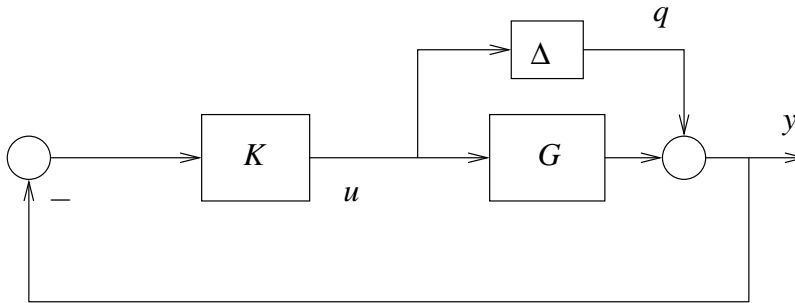


FIG. 1.23 – Boucle de suivi avec incertitude dynamique

Un calcul similaire fournit des conditions analogues pour la stabilité robuste face à de l'incertitude dynamique multiplicative. Ces conditions sont récapitulées dans la Table 1.1. Leur interprétation est simple: là où l'incertitude est grande ( $w(\omega) \gg 1$ ), les modules de  $KS(j\omega)$  et  $T(j\omega)$  et donc le gain en boucle ouverte  $\sigma_{max}(GK(j\omega))$  doivent être faibles. Ceci conduit au principe fondamental suivant:

**la stabilité robuste exige de petits gains là où l'incertitude non structurée est importante.**

Notons que la condition (1.51) reste suffisante mais plus nécessaire si l'incertitude est structurée ou paramétrique. Elle devient alors conservatrice et peut conduire à une atténuation du gain incompatible avec les objectifs de performance. On a donc souvent besoin de conditions plus fines basées sur les valeurs singulières "structurées" (voir section 9). En pratique, l'incertitude non structurée est surtout utile pour modéliser les dynamiques haute-fréquence négligées ou mal connues, ou les faibles non-linéarités.

type d'incertitude	borne sur l'incertitude	stabilité robuste ssi
$G + \Delta$	$\ \Delta(j\omega)\ _\infty \leq w_a(\omega)$	$\ w_a K(I + GK)^{-1}\ _\infty < 1$
$G(I + \Delta)$	$\ \Delta(j\omega)\ _\infty \leq w_{mi}(\omega)$	$\ w_{mi} KG(I + KG)^{-1}\ _\infty < 1$
$(I + \Delta)G$	$\ \Delta(j\omega)\ _\infty \leq w_{mo}(\omega)$	$\ w_{mo} GK(I + GK)^{-1}\ _\infty < 1$
$K + \Delta$	$\ \Delta(j\omega)\ _\infty \leq w_k(\omega)$	$\ w_k G(I + KG)^{-1}\ _\infty < 1$

TAB. 1.1 – Conditions pour la stabilité robuste.

Pour conclure, on notera que dans le cas SISO, la norme infinie de la fonction de sensibilité  $S(s)$  est liée aux notions classiques de **marge de gain** et de **marge de phase**. Ces notions sont habituellement définies sur le diagramme de Nyquist et indiquent l'éloignement du tracé de  $G(j\omega)K(j\omega)$  par rapport au point critique  $(-1,0)$ . Rappelons qu'il y a perte de stabilité lorsque ce tracé traverse le point critique. La marge de gain est:

$$\text{marge de gain} = -20 \log_{10} |G(j\omega_p)K(j\omega_p)| \quad (1.52)$$

où  $\omega_p$  est la fréquence à laquelle le tracé de Nyquist traverse le demi-axe de phase  $180^\circ$  (*phase crossover*). Elle mesure de combien le gain peut varier à cet endroit avant de toucher le point critique. La marge de phase est:

$$\text{marge de phase} = \text{Arg}(G(j\omega_c)K(j\omega_c)) - 180^\circ \quad (1.53)$$

où  $\omega_c$  est la fréquence à laquelle le tracé de Nyquist traverse le cercle unité centré à l'origine (fréquence de coupure). Elle mesure de combien la phase peut varier (rotation du tracé autour de l'origine) avant de rencontrer le point critique.

En comparaison,  $\|S\|_\infty^{-1}$  mesure directement la distance minimale du tracé de Nyquist au point critique. Il s'agit donc d'une mesure plus fiable du degré de stabilité. Ces différentes notions sont illustrées sur la Figure 1.24.

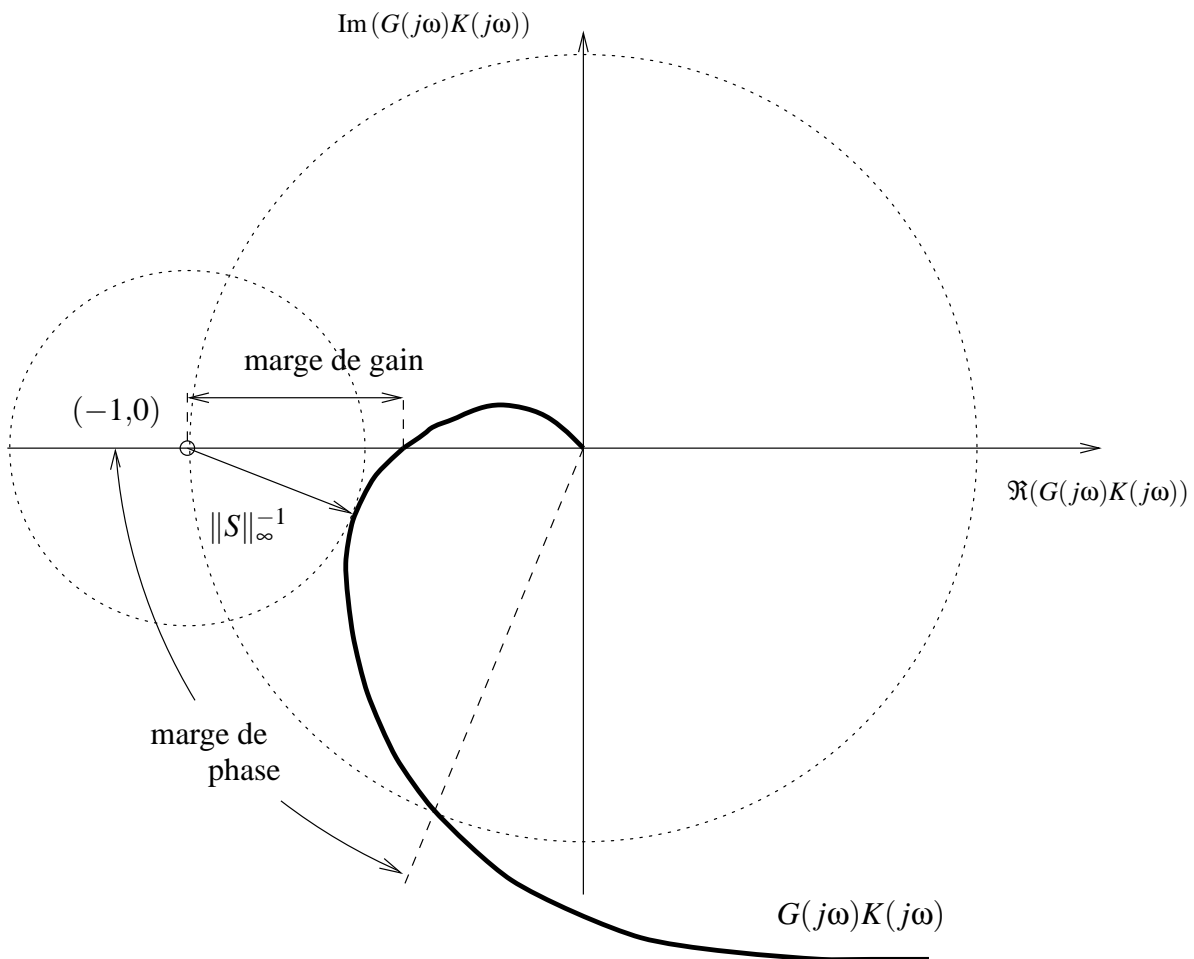


FIG. 1.24 – Marges de gain et de phase.

### 1.5.4 Passivité

Avant de terminer ce chapitre, nous donnons quelques indications sur la notion de passivité qui tout en étant très proche du Théorème du Faible Gain, fournit une autre manière de garantir la stabilité d'un système bouclé. La passivité est, en particulier, une notion très utile pour l'étude des systèmes flexibles (i.e., comprenant des modes résonants). Elle se définit de la façon suivante.

#### Definition 1.5.3 (Passivité)

Soit  $G(s)$  un système linéaire stationnaire MIMO et stable. Ce système est dit passif si et seulement si l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée:

(i) pour tout  $u \in \ell_2$ , le signal de sortie  $y = g * u \in \ell_2$  vérifie:

$$\forall T > 0, \quad \int_0^T y^T(t)u(t) dt \geq 0,$$

(ii)  $G(s)$  vérifie

$$G(s) + G^*(s) \geq 0 \quad \text{pour tout } s \text{ tel que } \operatorname{Re}(s) \geq 0. \quad (1.54)$$

(iii)  $G(s)$  vérifie

$$\|(I + G)^{-1}(I - G)\|_\infty \leq 1. \quad (1.55)$$

A noter que dans le cas SISO, la condition (ii) s'écrit aussi  $\operatorname{Re}(G(s)) \geq 0$ . Autrement dit, le diagramme de Nyquist de  $G(s)$  doit être entièrement contenu dans le demi-plan droit.

L'intérêt de la passivité découle du résultat suivant sur le rebouclage des systèmes passifs.

**Théorème 1.5.4** *Considérons le système bouclé de la Figure 1.25.*

*Si  $G(s)$  est un système linéaire stable passif, alors la boucle fermée est stable pour tout opérateur passif  $\Delta$  de  $\ell_2$ , c'est-à-dire pour tout opérateur  $\Delta(\cdot)$  satisfaisant:*

$$\forall T > 0, \quad \int_0^T z^T(t) \Delta(z(t)) dt \geq 0.$$

**Proof:** Voir la référence [1].

Une conséquence immédiate de ce Théorème est que la boucle de suivi de la Figure 1.5 est stable dès que la boucle ouverte  $GK(s)$  est passive (prendre  $\Delta = 1$ ). On peut donc rechercher la passivité comme moyen d'imposer la stabilité. Cette démarche est particulièrement pertinente en présence de modes souples d'amortissement incertain. En effet, une variation d'amortissement fait varier le gain mais pas

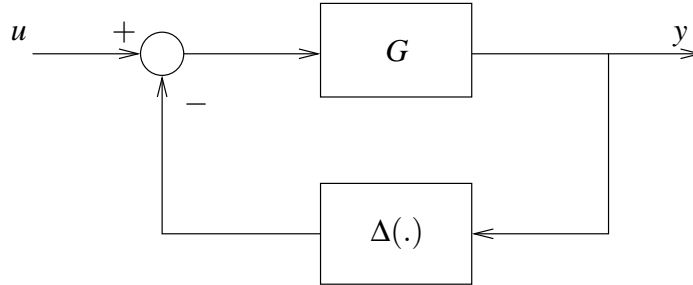


FIG. 1.25 – Théorème de passivité.

la phase. La boucle ouverte restera donc passive et la stabilité sera maintenue quelles que soient les variations d'amortissement. On notera qu'il s'agit ici d'incertitude paramétrique pour laquelle le Théorème des Petits Gains est typiquement très conservatif (à cause des importantes variations de gain sous-jacentes). Avec l'approche par passivité, on évite ce conservatisme et on obtient souvent une bonne robustesse sans dégradation importante des performances. Ceci étant, cette approche ne permet pas une prise en compte quantitative de l'incertitude comme avec le Théorème des Petits Gains. Il faut se tourner vers la  $\mu$ -synthèse pour un traitement quantitatif plus rigoureux.

D'après (iii) de la Définition 1.5.3, la passivité de  $GK(s)$  peut s'exprimer comme une contrainte sur la norme  $H_\infty$  de

$$S - T = (I + GK)^{-1}(I - GK).$$

En pratique, on n'exige souvent la passivité que dans des bandes limitées de fréquence (par exemple, au voisinage des modes souples), et on utilisera donc une fonction de pondération pour sélectionner les zones de fréquences désirées.

## Bibliographie

- [1] Boyd, S., and Q. Yang. Structured and Simultaneous Lyapunov Functions for System Stability Problems *Int. Journal of Control*, 49 (1989), pp. 2215-2240.
- [2] J. Doyle. Analysis of feedback systems with structured uncertainties. *IEE Proceedings, Part D*, 129(6):242–250, 1982.
- [3] J. C. Doyle, B. A. Francis, and A. R. Tannenbaum, *Feedback Control Theory*, Macmillan Publishing Co, New York, 1992.
- [4] J. S. Freudenberg and D. P. Looze. Frequency Domain Properties of Scalar and Multivariable Feedback Systems. *Berlin: Springer-Verlag*.
- [5] I. Horowitz Synthesis of Feedback Systems. *New York: Academic Press*.
- [6] M. G. Safonov and J. C. Doyle Minimizing Conservativeness of Robustness Singular Values *S. G. Tzafestas ed., Multivariable Control*, pp. 197–207, 1984.
- [7] G. Zames and B. A. Francis Feedback, Minimax Sensitivity, and Optimal Robustness *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-26, pp. 301-320
- [8] Zames, G., “On the Input-Output Stability of Time-Varying Nonlinear Feedback Systems, Part I and II,” *IEEE Trans. Aut. Contr.*, AC-11 (1966), pp. 228-238 and 465-476.





## Chapitre 2

### La synthèse $H_\infty$

Dans ce chapitre, nous examinons la technique de synthèse  $H_\infty$ . Cette technique présente des similarités fortes avec la méthode LQG, mais elle s'en différencie pour différentes raisons que nous mettons en évidence. Ce chapitre décrit également différentes structures typiques de synthèse très utilisées en pratique telles que la structure de sensibilité mixte et sa version duale. Ces structures permettent de prendre en compte les différentes spécifications et les conflits qui apparaissent dans de nombreux problèmes pratiques. On porte aussi une attention particulière sur le problème du *loop shaping* et le choix des fonctions de pondération. Ces fonctions jouent un rôle très important dans les applications car elles déterminent la bande passante du système commandé mais aussi sa robustesse et ses propriétés en termes de rejection de bruits. On décrit également les principaux algorithmes pour la construction des solutions du problème  $H_\infty$ . On examine plus particulièrement l'algorithme DGKF qui est actuellement l'algorithme le plus fiable et le plus rapide pour résoudre les problèmes  $H_\infty$ . Enfin, on discute brièvement l'utilisation des techniques LMI dans le cadre de la synthèse  $H_\infty$ .

## 2.1 Méthodes $H_\infty$ pour la Synthèse d'Asservissements

### 2.1.1 Le problème $H_\infty$ standard

Sous sa forme la plus simple, le problème  $H_\infty$  est un problème de réjection de perturbation. Il consiste à minimiser l'effet d'une perturbation  $w$  sur le comportement du système. Le signal  $w$  est supposé d'énergie finie et sa taille est mesurée en norme  $\ell_2$ . Son effet sur le système est mesuré par la norme  $\ell_2$  d'un vecteur "coût"  $z$ . Enfin, on peut agir sur le système par une commande  $u$  et on dispose d'une observation  $y$ . Il s'agit donc de synthétiser une loi de commande  $u = K(s)y$  qui minimise l'impact de  $w$  sur  $z$ . On mesurera cet impact par le rapport  $\frac{\|z\|_2}{\|w\|_2}$ . La stabilité interne du système bouclé devra bien sûr être assurée.

Ce problème standard est représenté schématiquement par la Figure 2.1.

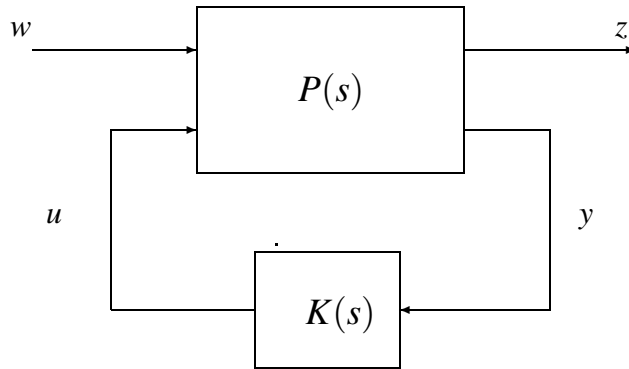


FIG. 2.1 – Problème  $H_\infty$  standard.

La fonction de transfert  $P(s)$  décrit les interconnexions entre  $w, u, z, y$ :

$$\begin{pmatrix} Z(s) \\ Y(s) \end{pmatrix} = P(s) \begin{pmatrix} W(s) \\ U(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W(s) \\ U(s) \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

On appelle  $P$  le système (*plant*) et on le supposera propre. Lorsque ce système est rebouclé sur la commande  $u = K(s)y$ , le transfert boucle fermée de  $w$  à  $z$  est donné par la Transformation Linéaire Fractionnelle (LFT):

$$\mathcal{F}(P, K) = P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21}. \quad (2.2)$$

En observant que le ratio  $\frac{\|z\|_2}{\|w\|_2}$  est dans le pire des cas:

$$\sup_{w \neq 0} \frac{\|z\|_2}{\|w\|_2} = \|\mathcal{F}(P, K)\|_\infty, \quad (2.3)$$

le problème décrit ci-dessus peut se formuler mathématiquement comme suit:

**Problème  $H_\infty$  Optimal:** minimiser  $\|\mathcal{F}(P,K)\|_\infty$  sur l'ensemble des compensateurs  $K(s)$  qui stabilisent le système de manière interne.

Le minimum est noté  $\gamma_{opt}$  et appelé gain (ou atténuation) “ $H_\infty$ -optimal”. Le problème sous-optimal associé joue également un rôle important:

**Problème  $H_\infty$  Sous-Optimal:** étant donné  $\gamma > 0$ , trouver un compensateur  $K(s)$  qui stabilise le système de manière interne et assure  $\|\mathcal{F}(P,K)\|_\infty < \gamma$ .

### 2.1.2 Formulation $H_\infty$ du loop shaping

Nous avons vu aux chapitres 1 que la plupart des spécifications fréquentielles peuvent s'exprimer par des contraintes sur le profil de la plus petite et plus grande valeur singulière du transfert en boucle ouverte  $GK(s)$ . De façon équivalente puisque

$$\begin{aligned}\sigma_{min}(GK(j\omega)) \gg 1 &\iff \sigma_{max}(S(j\omega)) \ll 1 \\ \sigma_{max}(GK(j\omega)) \ll 1 &\iff \sigma_{max}(T(j\omega)) \ll 1,\end{aligned}$$

on peut raisonner en termes de contraintes sur l'allure des fonctions  $\sigma_{max}(S(j\omega))$  et  $\sigma_{max}(T(j\omega))$ . Ces contraintes sont de la forme:

$$\sigma_{max}(S(j\omega)) \leq \ell_S(\omega); \quad \sigma_{max}(T(j\omega)) \leq \ell_T(\omega) \quad (2.4)$$

où  $\ell_S$  et  $\ell_T$  sont des fonctions scalaires spécifiant l'allure désirée.

Si l'on définit  $w_1 := \ell_S^{-1}$  et  $w_3 := \ell_T^{-1}$ , (2.4) s'écrit aussi:

$$\|w_1 S\|_\infty < 1; \quad \|w_3 T\|_\infty < 1. \quad (2.5)$$

Les fonctions  $w_1$  et  $w_3$  sont appelées **fonctions de pondération** (*weighting functions*). Les indices 1 et 3 sont utilisés par convention en lien avec la Figure 2.2. Dans le cas MIMO,  $w_1$  et  $w_3$  peuvent être des matrices de façon à privilégier certaines directions et donc à modeler plus précisément les valeurs singulières de  $S$  et  $T$ .

Déterminer directement un compensateur  $K(s)$  qui assure (2.5) est un problème ouvert. Cependant, on peut substituer à (2.5) une condition proche qui conduit à un problème  $H_\infty$  sous-optimal. En effet, (2.5) est impliquée par

$$\left\| \begin{pmatrix} w_1 S \\ w_3 T \end{pmatrix} \right\|_\infty < 1 \quad (2.6)$$

et l'on a

$$\max(\|w_1 S\|_\infty, \|w_3 T\|_\infty) \leq \left\| \begin{pmatrix} w_1 S \\ w_3 T \end{pmatrix} \right\|_\infty \leq \sqrt{2} \max(\|w_1 S\|_\infty, \|w_3 T\|_\infty).$$

Pour obtenir les profils désirés pour  $\sigma_{\max}(S(j\omega))$  et  $\sigma_{\max}(T(j\omega))$ , il est donc raisonnable de chercher à réaliser (2.6) en résolvant:

**Problème de Sensibilité Mixte:** trouver un compensateur  $K(s)$  qui assure la stabilité interne de la boucle et satisfasse  $\left\| \begin{pmatrix} w_1 S \\ w_3 T \end{pmatrix} \right\|_\infty < 1$ .

En pratique, le problème de sensibilité mixte est souvent insuffisant pour traiter toutes les spécifications du *loop shaping*. En particulier, on a vu en 5.3 et 5.4 que les considérations de stabilité et performances robustes peuvent introduire des contraintes sur d'autres fonctions de transfert comme  $KS$  et aussi  $\Sigma$ ,  $G\Sigma$  et  $KG\Sigma$  où

$$\Sigma = (I + KG)^{-1}.$$

Pour les prendre en compte, on doit s'intéresser à la généralisation suivante.

**Problème de Sensibilité Mixte Généralisé:** trouver un compensateur  $K(s)$  qui assure la stabilité interne de la boucle et satisfasse:

$$\left\| \begin{pmatrix} w_1 S \\ w_2 KS \\ w_3 T \end{pmatrix} \right\|_\infty < 1 \quad \text{et} \quad \left\| \begin{pmatrix} w_4 \Sigma \\ w_5 G\Sigma \\ w_6 KG\Sigma \end{pmatrix} \right\|_\infty < 1. \quad (2.7)$$

Pour conclure cette section, notons que les problèmes introduits ci-dessus sont des cas particuliers du problème  $H_\infty$  sous-optimal. En effet, les critères utilisés sont du type

$$\|\mathcal{F}(P,K)\|_\infty < 1$$

où  $P(s)$  est construit à partir de  $G$  et des matrices de pondération  $w_i$  comme suit:

$$\mathcal{F}(P,K) = \begin{pmatrix} w_1 S \\ w_2 KS \\ w_3 T \end{pmatrix} \longrightarrow P = \left( \begin{array}{c|c} w_1 & -w_1 G \\ 0 & w_2 \\ 0 & w_3 G \\ \hline I & -G \end{array} \right) \quad (2.8)$$

$$v\mathcal{F}(P,K) = \begin{pmatrix} w_4 \Sigma \\ w_5 G\Sigma \\ w_6 KG\Sigma \end{pmatrix} \longrightarrow P = \left( \begin{array}{c|c} w_4 & -w_4 \\ w_5 G & -w_5 G \\ 0 & w_6 \\ \hline G & -G \end{array} \right) \quad (2.9)$$

Le terme "système augmenté" est utilisé pour  $P(s)$ . La construction du problème

$H_\infty$  équivalent est illustrée en Figure 2.2 pour le critère  $\left\| \begin{pmatrix} w_1 S \\ w_2 KS \\ w_3 T \end{pmatrix} \right\|_\infty < 1$ . La

fonction de transfert de  $w$  au signal de sortie  $z$  est:

$$Z(s) = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 S \\ w_2 KS \\ w_3 T \end{pmatrix} W(s).$$

On reconnaît bien un problème de rejection de perturbation où l'effet de  $w$  sur les sorties filtrées  $(z_1, z_2, z_3)$  doit être atténué en deçà du ratio 1.

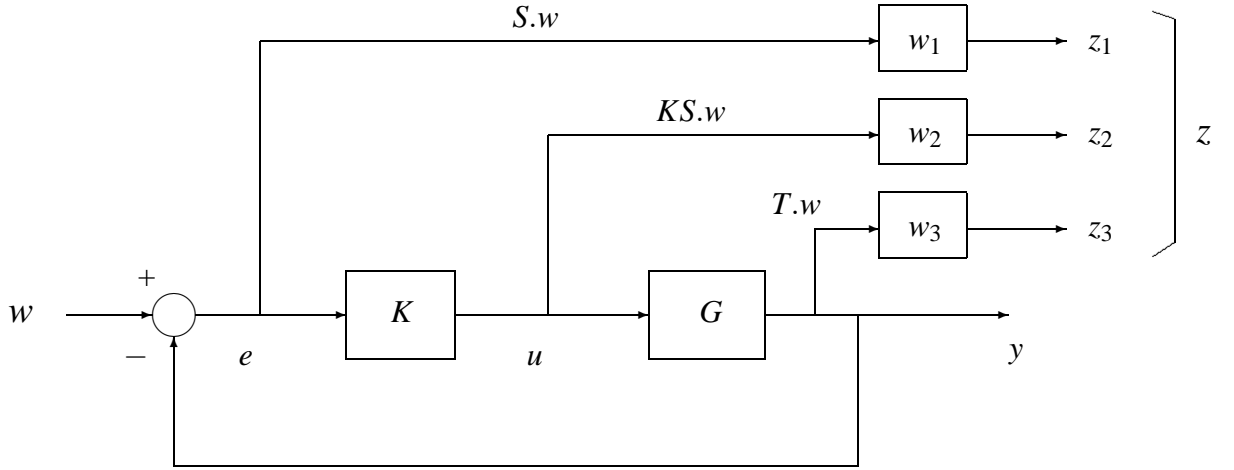


FIG. 2.2 – Problème de sensibilité mixte.

## 2.2 Résolution du Problème $H_\infty$

Cette section présente les techniques de résolution par variable d'état des problèmes  $H_\infty$  sous-optimaux et optimaux. L'approche variable d'état (*state-space*) date de 1989 [2] et est aujourd'hui la plus riche et la mieux adaptée au calcul numérique. Elle marque un pas décisif vers une synthèse systématique des asservissements robustes.

### 2.2.1 Résolution du problème normalisé

Introduisons une réalisation minimale du système  $P(s)$ :

$$P(s) = \begin{pmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} (sI - A)^{-1} \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Cette réalisation est associée à la description interne suivante ( $x$  étant le vecteur d'état):

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u \\ z = C_1 x + D_{11} w + D_{12} u \\ y = C_2 x + D_{21} w + D_{22} u \end{cases} . \quad (2.11)$$

On supposera que

$$D_{12} \in \mathbb{R}^{p_1 \times m_2}; \quad D_{21} \in \mathbb{R}^{p_2 \times m_1}$$

avec  $m_1 \geq p_2$  and  $p_1 \geq m_2$ . Enfin  $n$  désignera la taille de  $A$ , i.e., l'ordre du système  $P(s)$ .

La solution par variable d'état n'est applicable que sous les hypothèses suivantes.

- (A1)  $(A, B_2, C_2)$  est stabilisable et détectable. Cette condition est nécessaire et suffisante pour l'existence d'un compensateur qui stabilise le système de manière interne.
- (A2) Les matrices  $D_{12}$  et  $D_{21}$  sont de plein rang.
- (A3)

$$\text{rang} \begin{pmatrix} j\omega I - A & -B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{pmatrix} = n + m_2$$

et

$$\text{rang} \begin{pmatrix} j\omega I - A & B_1 \\ -C_2 & D_{21} \end{pmatrix} = n + p_2$$

pour tout  $\omega \in \mathbb{R}$ . Autrement dit,  $P_{12}(s)$  et  $P_{21}(s)$  n'ont pas de zéro sur l'axe imaginaire.

Ces deux dernières hypothèses sont appelées **hypothèses de régularité**. Dans un premier temps, nous ferons en plus les hypothèses simplificatrices suivantes dites de "**normalisation**":

(A4) normalisation:  $D_{12}^T(D_{12}, C_1) = (I, 0)$  et  $D_{21}(D_{21}^T, B_1^T) = (I, 0)$ .

(A5)  $D_{22} = 0$  et  $D_{11} = 0$ .

On peut toujours satisfaire (A4)-(A5) par des changements de variables appropriés.

On a la caractérisation suivante des valeurs sous-optimales de  $\|\mathcal{F}(P, K)\|_\infty$  pour le problème normalisé [2].

**Théorème 2.2.1** *Sous les hypothèses (A1)-(A5) ci-dessus, il existe un compensateur  $K(s)$  qui stabilise le système de manière interne et assure  $\|\mathcal{F}(P, K)\|_\infty < \gamma$  si et seulement si:*

(i) les équations de Riccati

$$A^T X + XA + X(\gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T)X + C_1^T C_1 = 0; \quad (2.12)$$

$$AY + YA^T + Y(\gamma^{-2} C_1^T C_1 - C_2^T C_2)Y + B_1 B_1^T = 0 \quad (2.13)$$

ont des solutions stabilisantes  $X_\infty$  et  $Y_\infty$ , respectivement.

(ii) Ces solutions vérifient de plus

$$X_\infty \geq 0; \quad Y_\infty \geq 0; \quad \rho(X_\infty Y_\infty) < \gamma^2. \quad (2.14)$$

Pour la résolution des équations de Riccati (2.12)-(2.13), on se référera à l'appendice. L'existence de solutions stabilisantes traduit la contrainte  $\|\mathcal{F}(P,K)\|_\infty < \gamma$  alors que les conditions de positivité (2.14) assurent la stabilité interne. On rappelle que si

$$K(s) = D_K + C_K(sI - A_K)^{-1}B_K$$

est une réalisation (minimale) du compensateur, la matrice d'état du système bouclé est (voir 2.2)

$$A_{BF} = \begin{pmatrix} A + B_2 D_K C_2 & B_2 C_K \\ B_K C_2 & A_K \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

et la stabilité interne est équivalente à la stabilité de  $A_{BF}$  au sens des matrices.

Le Théorème 2.2.1 suggère un algorithme de dichotomie pour calculer le gain  $H_\infty$ -optimal  $\gamma_{opt}$ . Cet algorithme est connu sous le nom de  $\gamma$ -itération. On initialise le processus de dichotomie avec un intervalle  $[\gamma_{min}, \gamma_{max}]$  contenant  $\gamma_{opt}$  et à chaque itération, on élimine une moitié de cet intervalle en testant les conditions (i)-(ii) au point médian

$$\gamma = \frac{1}{2}(\gamma_{min} + \gamma_{max}).$$

Si elles sont satisfaites, on a  $\gamma > \gamma_{opt}$  et on rejette la moitié droite de l'intervalle. Sinon, on élimine la moitié gauche. Ce schéma itératif s'arrête lorsque la longueur de l'intervalle tombe en-dessous de la précision désirée pour  $\gamma_{opt}$ . A chaque itération, "tester" la valeur  $\gamma$  exige d'effectuer les opérations suivantes:

**Étape 1:** calculer le spectre des matrices Hamiltoniennes

$$H_\infty = \begin{pmatrix} A & \gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T \\ -C_1^T C_1 & -A^T \end{pmatrix}; \quad J_\infty = \begin{pmatrix} A^T & \gamma^{-2} C_1^T C_1 - C_2^T C_2 \\ -B_1 B_1^T & -A \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

associées aux équations de Riccati (2.12)-(2.13). Si ces spectres contiennent des valeurs propres imaginaires pures, conclure que  $\gamma < \gamma_{opt}$  et passer à l'itération suivante.

**Étape 2:** calculer les sous-espaces invariants stables  $\begin{pmatrix} P_X \\ Q_X \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} P_Y \\ Q_Y \end{pmatrix}$  de  $H_\infty$  et  $J_\infty$ , respectivement. On notera qu'ils sont toujours de dimension  $n$  à ce stade. Si  $P_X$  ou  $P_Y$  est singulière, conclure que  $\gamma < \gamma_{opt}$  et passer à l'itération suivante. Sinon, calculer les solutions stabilisantes des équations de Riccati comme:

$$X_\infty = Q_X P_X^{-1}; \quad Y_\infty = Q_Y P_Y^{-1}.$$

**Étape 3:** tester (ii) pour conclure sur la position de  $\gamma$  par rapport à  $\gamma_{opt}$ .

Signalons que, dans la majeure partie des cas, l'optimum est caractérisé par l'égalité

$$\rho(X_\infty Y_\infty) = \gamma_{opt}^2.$$

En plus d'une caractérisation du gain  $H_\infty$ -optimal, l'approche variable d'état fournit également des formules explicites pour une solution particulière du problème sous-optimal de paramètre  $\gamma$ .

**Théorème 2.2.2** *Supposons (A1)-(A5) et soit  $\gamma > \gamma_{opt}$ . Alors le compensateur*

$$K_c(s) = C_c(sI - A_c)^{-1}B_c$$

avec

$$\begin{aligned} A_c &= A + (\gamma^{-2}B_1B_1^T - B_2B_2^T)X_\infty - (I - \gamma^{-2}Y_\infty X_\infty)^{-1}Y_\infty C_2^T C_2; \\ B_c &= (I - \gamma^{-2}Y_\infty X_\infty)^{-1}Y_\infty C_2^T; \quad C_c = -B_2^T X_\infty \end{aligned} \quad (2.17)$$

stabilise le système de manière interne et satisfait

$$\|\mathcal{F}(P, K_c)\|_\infty < \gamma.$$

Cette solution particulière du problème  $H_\infty$  sous-optimal est appelée **compensateur central** (*central controller*).

On notera que le compensateur central est strictement propre et d'ordre égal à celui du système  $P(s)$ . Si l'optimum est caractérisé par  $\rho(X_\infty Y_\infty) = \gamma_{opt}^2$ , ces formules deviennent singulières au voisinage de  $\gamma_{opt}$  ( $I - \gamma^{-2}Y_\infty X_\infty$  n'est plus inversible à l'optimum). Cependant, on montre que  $K_c$  tend alors vers un compensateur d'ordre réduit, la chute d'ordre étant égale à la chute de rang de  $I - \gamma_{opt}^{-2}Y_\infty X_\infty$ . Cette réduction d'ordre provient de la simplification de pôle(s) à l'infini.

On conclut cette section par un exemple illustratif simple.

**Exemple 2.2.3** Considérons le système

$$P(s) = \left( \begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{s-1} & 1 & \frac{3}{s^2-1} \end{array} \right)$$

Une réalisation minimale (2.10) de ce système est obtenue pour

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad C_1 = (0,0); \\ C_2 &= (1, -1); \quad D_{11} = (0,0); \quad D_{12} = 1; \quad D_{21} = (0,1); \quad D_{22} = 0. \end{aligned}$$

On vérifie aisément que ces paramètres satisfont (A1)-(A5). L'algorithme de  $\gamma$ -itération donne alors  $\gamma_{opt} \approx 1.609$ . L'optimum est caractérisé par  $\rho(X_\infty Y_\infty) = \gamma_{opt}^2$ .



Pour  $\gamma = 1.7$ , le calcul des paramètres du compensateur central donne:

$$A_c = \begin{pmatrix} -4.28 & -3.02 \\ -12.86 & -7.43 \end{pmatrix}; \quad B_c = \begin{pmatrix} 2.41 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad C_c = (-12.86, -6.43)$$

soit

$$K_c(s) = -31.05 \frac{s+1}{s^2 + 21.7s + 67.29}.$$

La norme de  $\mathcal{F}(G, K_c)$  est 1.698 qui est bien inférieure à 1.7. Enfin les pôles du système bouclé sont  $-1, -1, -1.41, -18.29$  ce qui confirme la stabilité interne.

Lorsqu'on approche de  $\gamma_{opt}$ , le compensateur central évolue comme suit:

$$\begin{aligned} \gamma = 1.65 & \longrightarrow K_c(s) = -\frac{s+1}{0.015s^2 + 0.66s + 2.14} \\ \gamma = 1.61 & \longrightarrow K_c(s) = -\frac{s+1}{2 \times 10^{-4}s^2 + 0.62s + 2.12} \\ \gamma = 1.60949 & \longrightarrow K_c(s) = -\frac{s+1}{5 \times 10^{-6}s^2 + 0.62s + 2.12}. \end{aligned}$$

On voit que ce compensateur tend vers le compensateur optimal

$$K_{opt}(s) = -\frac{s+1}{0.62s + 2.12} = -1.61 \left(1 - \frac{2.42}{s + 3.42}\right).$$

On notera la réduction d'ordre à l'optimum.

Pour conclure cette section, notons que lorsque  $\gamma \rightarrow +\infty$ , le compensateur central tend vers le compensateur de paramètres:

$$A_c = A - B_2 B_2^T X - Y C_2^T C_2; \quad B_c = Y C_2^T; \quad C_c = -B_2^T X \quad (2.18)$$

où  $X$  et  $Y$  sont les solutions stabilisantes des équations de Riccati:

$$A^T X + X A - X B_2 B_2^T X + C_1^T C_1 = 0; \quad (2.19)$$

$$A Y + Y A^T - Y C_2^T C_2 Y + B_1 B_1^T = 0. \quad (2.20)$$

On reconnaît ici le compensateur optimal pour le problème linéaire quadratique Gaussien (LQG) suivant.

**Problème LQG:** trouver la commande  $u(t) = F(y(t))$  (retour d'observation) qui minimise la fonction coût

$$J(u) = E \left[ \int_0^{+\infty} (x^T C_1^T C_1 x + u^T u) dt \right] \quad (2.21)$$

pour le système décrit par les équations d'état

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_2 u(t) + B_1 w(t) \\ y(t) = C_2 x(t) + v(t) \end{cases} \quad (2.22)$$

où  $v$  et  $w$  sont des bruits blancs Gaussiens non corrélés de variance unitaire.

On montre que ce problème est équivalent à la minimisation de la norme  $H_2$  du système bouclé, soit

$$\min_{u=K(s)y} \|\mathcal{F}(P,K)\|_2.$$

Pour cette raison le compensateur (2.18) est aussi appelé compensateur  $H_2$ -**optimal**. Contrairement au problème  $H_\infty$ , le compensateur optimal est ici unique. Enfin, rappelons qu'une forme équivalente de (2.18) est

$$u(t) = -B_2^T X \hat{x}(t) \quad (2.23)$$

où  $\hat{x}(t)$  est l'estimée de Kalman de l'état  $x(t)$  construite en fonction de l'observation  $y(t)$  selon

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + B_2 u(t) + Y C_2^T [y(t) - C_2 \hat{x}(t)]; \quad \hat{x}(0) = 0. \quad (2.24)$$

La matrice  $L = Y C_2^T$  est appelée gain de l'observateur de Kalman (2.24).

### 2.2.2 Solution générale des problèmes $H_\infty$ réguliers

On donne ici la caractérisation de  $\gamma_{opt}$  et les formules du compensateur central  $K_c$  pour le problème régulier sous-optimal le plus général où seules (A1)-(A3) sont supposées. Les résultats sont qualitativement les mêmes mais les formules sont plus complexes. On maintiendra encore l'hypothèse  $D_{22} = 0$  puisqu'elle correspond à un simple changement de variable pour le compensateur. En effet, si  $K(s)$  résout le problème sous-optimal avec  $D_{22}$  mis à zéro, alors  $K(I + D_{22}K)^{-1}$  résout le problème original.

La contrepartie des équations de Riccati (2.12)-(2.13) est obtenue en remplaçant les expressions (2.16) des Hamiltoniens par:

$$H_\infty = \begin{pmatrix} A & 0 \\ -C_1^T C_1 & -A^T \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ -C_1^T D_{11} & -C_1^T D_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma^2 I - D_{11}^T D_{11} & -D_{11}^T D_{12} \\ -D_{12}^T D_{11} & -D_{12}^T D_{12} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} D_{11}^T C_1 & B_1^T \\ D_{12}^T C_1 & B_2^T \end{pmatrix}; \quad (2.25)$$

$$J_\infty = \begin{pmatrix} A^T & 0 \\ -B_1 B_1^T & -A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_1^T & C_2^T \\ -B_1 D_{11}^T & -B_1 D_{21}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma^2 I - D_{11} D_{11}^T & -D_{11} D_{21}^T \\ -D_{21} D_{11}^T & -D_{21} D_{21}^T \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} D_{11} B_1^T & C_1 \\ D_{21} B_1^T & C_2 \end{pmatrix}. \quad (2.26)$$

La caractérisation du gain optimal  $\gamma_{opt}$  est donnée par la contrepartie suivante du Théorème 2.2.1.

**Théorème 2.2.4** *Sous les hypothèses (A1)-(A3) et avec  $D_{22} = 0$ , il existe un compensateur stabilisant de façon interne et tel que  $\|\mathcal{F}(G,K)\|_\infty < \gamma$  si et seulement si:*

- (i)  $\gamma > \sigma_d := \max \left\{ \sigma_{\max} \left( (I - D_{12}D_{12}^+)D_{11} \right), \sigma_{\max} \left( D_{11}(I - D_{21}^+D_{21}) \right) \right\}$ .
- (ii) *Les équations de Riccati associées aux Hamiltoniens  $H_\infty$  et  $J_\infty$  ont des solutions stabilisantes  $X_\infty = \text{Ric}(H_\infty)$  et  $Y_\infty = \text{Ric}(J_\infty)$ .*
- (iii) *Ces solutions vérifient de plus:*

$$X_\infty \geq 0; \quad Y_\infty \geq 0; \quad \rho(X_\infty Y_\infty) < \gamma^2.$$

Pour  $\gamma > \gamma_{opt}$ , l'analogue du compensateur central  $K_c$  pour le problème normalisé est construit comme suit:

1) calculer une matrice  $D_c$  telle que

$$\sigma_{\max}(D_{11} + D_{12}D_cD_{21}) < \gamma. \quad (2.27)$$

Si

$$D_{12} = (U_1, U_2) \begin{pmatrix} \Sigma_{12} \\ 0 \end{pmatrix} W^T; \quad D_{21} = Z (\Sigma_{21}, 0) \begin{pmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{pmatrix}$$

sont des SVD de  $D_{12}$  et  $D_{21}$ , la contrainte (2.27) est équivalente à

$$\sigma_{\max} \begin{pmatrix} U_1^T D_{11} V_1 + \Sigma_{12} W^T D_c Z \Sigma_{21} & U_1^T D_{11} V_2 \\ U_2^T D_{11} V_1 & U_2^T D_{11} V_2 \end{pmatrix} < \gamma$$

qui est en particulier satisfaite pour

$$D_c = -W \Sigma_{12}^{-1} \Delta \Sigma_{21}^{-1} Z^T \quad (2.28)$$

où

$$\Delta = U_1^T D_{11} \left\{ I + V_2 [\sigma_d^2 I - V_2^T D_{11}^T U_2 U_2^T D_{11} V_2]^{-1} V_2^T D_{11}^T U_2 U_2^T D_{11} \right\} V_1$$

et  $\sigma_d$  est défini en (i) du Théorème 2.2.4.

2) Calculer les paramètres réduits suivants:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= A + B_2 D_c C_2; & \mathcal{B} &= B_1 + B_2 D_c D_{21}; \\ \mathcal{C} &= C_1 + D_{12} D_c C_2; & \mathcal{D} &= D_{11} + D_{12} D_c D_{21}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

3) Calculer

$$\begin{aligned} B_c &= -(I - \gamma^{-2} Y_\infty X_\infty)^{-1} \left[ (Y_\infty C_2^T D_{21}^+)^T + \mathcal{B} \right] + \\ &\quad (Y_\infty \tilde{C}_1^T + B_1 \tilde{D}_{11}^T) (\gamma^2 I - \tilde{D}_{11} \tilde{D}_{11}^T)^{-1} \mathcal{D} D_{21}^+ \end{aligned} \quad (2.30)$$

où

$$\tilde{C}_1 := C_1 - D_{11} D_{21}^+ C_2; \quad \tilde{D}_{11} := D_{11} (I - D_{21}^+ D_{21}).$$

4) Calculer

$$C_c = D_{12}^+ \left[ \left( D_{12}^{+T} B_2^T X_\infty + C \right) + \mathcal{D} (\gamma^2 I - \hat{D}_{11}^T \hat{D}_{11})^{-1} (\hat{B}_1^T X_\infty + \hat{D}_{11}^T C_1) \right] \quad (2.31)$$

où

$$\hat{B}_1 := B_1 - B_2 D_{12}^+ D_{11}; \quad \hat{D}_{11} := (I - D_{12} D_{12}^+) D_{11}.$$

5) Déterminer  $A_c$  en résolvant

$$(I - \gamma^{-2} Y_\infty X_\infty) A_c = \mathcal{A} + \gamma^{-2} Y_\infty \mathcal{A}^T X_\infty + B_2 C_c + (I - \gamma^{-2} Y_\infty X_\infty) B_c C_2 +$$

$$(-\gamma^{-1} Y_\infty C^T, \mathcal{B} + (I - \gamma^{-2} Y_\infty X_\infty) B_c D_{21}) \begin{pmatrix} \gamma I & \mathcal{D} \\ \mathcal{D}^T & \gamma I \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} C + D_{12} C_c \\ -\gamma^{-1} B^T X_\infty \end{pmatrix}. \quad (2.32)$$

## 2.3 Loop Shaping par les Méthodes $H_\infty$

### 2.3.1 Solution $H_\infty$ du problème de *loop shaping*

La solution du problème  $H_\infty$  sous-optimal décrite plus haut est directement applicable au problème de sensibilité mixte et donc au *loop shaping*. Il suffit de calculer une réalisation minimale du système augmenté  $P(s)$ . Pour ce faire, on utilise les formules de multiplication des réalisations minimales données en 2.2. Prenons l'exemple de

$$P(s) = \left( \begin{array}{c|c} w_1(s) & -w_1(s)G(s) \\ \hline 0 & w_2(s) \\ 0 & w_3(s)G(s) \\ \hline I & -G(s) \end{array} \right)$$

et introduisons les réalisations minimales:

$$G = \begin{bmatrix} A_G & B_G \\ C_G & D_G \end{bmatrix}; \quad w_1 = \begin{bmatrix} A_{w_1} & B_{w_1} \\ C_{w_1} & D_{w_1} \end{bmatrix}; \quad w_2 = \begin{bmatrix} A_{w_2} & B_{w_2} \\ C_{w_2} & D_{w_2} \end{bmatrix}; \quad w_3 = \begin{bmatrix} A_{w_3} & B_{w_3} \\ C_{w_3} & D_{w_3} \end{bmatrix}. \quad (2.33)$$

Ici la difficulté principale est d'assurer la minimalité de la réalisation obtenue pour  $P(s)$ . Ainsi, l'approche directe qui consisterait à former la matrice de fractions rationnelles  $P(s)$  et à en calculer une réalisation n'est pas viable en pratique; à cause de l'apparition répétée de  $G(s)$  notamment, l'algorithme de réalisation a tendance à dupliquer les modes de  $G$  et donc à fournir une réalisation non minimale.

Pour éviter de telles duplications, on peut chercher à décomposer  $P(s)$  en un produit de fonctions de transfert où  $G, w_1, w_2, w_3$  n'apparaissent qu'une seule fois.

Par exemple,

$$\begin{aligned}
 P &= \begin{pmatrix} w_1 & -w_1 G \\ 0 & w_2 \\ 0 & w_3 G \\ I & -G \end{pmatrix} = \text{diag}(w_1, w_2, w_3, I) \begin{pmatrix} I & -G \\ 0 & I \\ 0 & G \\ 0 & -G \end{pmatrix} \\
 &= \text{diag}(w_1, w_2, w_3, I) \begin{pmatrix} I & 0 & -I \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \\ I & 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \\ 0 & G \end{pmatrix} \quad (2.34)
 \end{aligned}$$

A partir des réalisations minimales de  $G, w_1, w_2$  et  $w_3$  on obtient:

$$\begin{aligned}
 \text{diag}(w_1, w_2, w_3, I) &= \left( \begin{array}{c|cc} \text{diag}(A_{w_1}, A_{w_2}, A_{w_3}) & \text{diag}(B_{w_1}, B_{w_2}, B_{w_3}) & 0 \\ \text{diag}(C_{w_1}, C_{w_2}, C_{w_3}) & \text{diag}(D_{w_1}, D_{w_2}, D_{w_3}) & 0 \\ 0 & 0 & I \end{array} \right); \\
 \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \\ 0 & G \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A_G & 0 & B_G \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \\ C_G & 0 & D_G \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

En utilisant la formule de multiplication des réalisations (voir 2.2), on en déduit

$$\begin{aligned}
 P &= \text{diag}(w_1, w_2, w_3, I) \begin{pmatrix} A_G & 0 & B_G \\ -C_G & I & -D_G \\ 0 & 0 & I \\ C_G & 0 & D_G \\ -C_G & I & -D_G \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} A_G & 0 & 0 & 0 & 0 & B_G \\ -B_{w_1} C_G & A_{w_1} & 0 & 0 & B_{w_1} & -B_{w_1} D_G \\ 0 & 0 & A_{w_2} & 0 & 0 & B_{w_2} \\ B_{w_3} C_G & 0 & 0 & A_{w_3} & 0 & B_{w_3} D_G \\ -D_{w_1} C_G & C_{w_1} & 0 & 0 & D_{w_1} & -D_{w_1} D_G \\ 0 & 0 & C_{w_2} & 0 & 0 & D_{w_2} \\ D_{w_3} C_G & 0 & 0 & C_{w_3} & 0 & D_{w_3} D_G \\ -C_G & 0 & 0 & 0 & I & -D_G \end{pmatrix}. \quad (2.35)
 \end{aligned}$$

Cette réalisation est bien minimale. On notera que l'ordre du système augmenté  $P(s)$  est la somme des ordres de  $G$  et des différentes fonctions de pondération:

$$\text{ordre}(P) = \text{ordre}(G) + \text{ordre}(w_1) + \text{ordre}(w_2) + \text{ordre}(w_3). \quad (2.36)$$

Sous réserve que les hypothèses (A1)-(A3) soient vérifiées, on peut directement appliquer l'algorithme de  $\gamma$ -itération pour déterminer si l'atténuation  $\gamma = 1$  est

faisable. Si oui, le problème de sensibilité mixte de critère

$$\|\mathcal{F}(P,K)\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} w_1 S \\ w_2 KS \\ w_3 T \end{pmatrix} \right\|_\infty < 1$$

est soluble et les formules du compensateur central fournissent une solution particulière d'ordre égal à l'ordre du système augmenté. La partie synthèse du compensateur est donc immédiate et l'essentiel du travail consiste à choisir les fonctions de pondération appropriées.

Pour conclure, on donne la contrepartie de (2.35) pour le critère

$$\left\| \begin{pmatrix} w_4 \Sigma \\ w_5 G\Sigma \\ w_6 KG\Sigma \end{pmatrix} \right\|_\infty < 1$$

où  $\Sigma = (I + KG)^{-1}$ . Pour ce critère une réalisation minimale du système augmenté est:

$$P = \left( \begin{array}{cccc|ccc} A_G & 0 & 0 & 0 & B_G & -B_G & \\ 0 & A_{w_4} & 0 & 0 & B_{w_4} & -B_{w_4} & \\ B_{w_5}C_G & 0 & A_{w_5} & 0 & B_{w_5}D_G & -B_{w_5}D_G & \\ 0 & 0 & 0 & A_{w_6} & 0 & B_{w_6} & \\ \hline 0 & C_{w_4} & 0 & 0 & D_{w_4} & -D_{w_4} & \\ D_{w_5}C_G & 0 & C_{w_5} & 0 & D_{w_5}D_G & -D_{w_5}D_G & \\ 0 & 0 & 0 & C_{w_6} & 0 & D_{w_6} & \\ \hline C_G & 0 & 0 & 0 & D_G & -D_G & \end{array} \right). \quad (2.37)$$

### 2.3.2 Choix des fonctions de pondération

Le choix des fonctions de pondération  $w_i$  est dicté par une double préoccupation:

- produire le profil désiré pour les valeurs singulières des fonctions de transfert caractéristiques  $(S, KS, T, G\Sigma, \dots)$ ,
- assurer que le problème  $H_\infty$  résultant est régulier, c'est-à-dire que (A1)-(A3) sont vérifiées.

Dans le cas SISO, les spécifications de profil sont relativement aisées à traduire en terme de pondérations. Si la contrainte sur  $S$  est du type

$$\sigma_{\max}(S(j\omega)) < |\ell(j\omega)|,$$

il suffit de choisir  $w_1(s) = \frac{1}{\ell(s)}$ . La tâche se réduit donc à trouver une fraction rationnelle  $\ell(s)$  dont le profil  $|\ell(j\omega)|$  reflète les contraintes imposées sur  $\sigma_{\max}(S(j\omega))$ .

Le cas MIMO est plus complexe à cause des aspects directionnels. Les spécifications peuvent en effet différer d'une pair entrée/sortie à l'autre; par exemple, on pourra exiger de bonnes performances de suivi de la consigne  $r_1$  par la sortie  $y_1$ , et au contraire une réjection de l'entrée  $r_2$  au niveau de  $y_1$ . Ce scénario est classique lorsqu'on cherche à découpler l'effet des commandes sur les sorties. De telles spécifications introduisent des contraintes directionnelles sur  $S$  et  $T$ ; à une même fréquence  $\omega$ ,  $T(j\omega)$  devra se comporter comme  $I$  dans la direction  $r_1$  et comme 0 dans la direction  $r_2$ . On est donc amené à modéliser séparément chaque valeur singulière de  $S$  et  $T$ . Ceci requiert l'utilisation de fonctions de pondération matricielles et de la représentation généralisée (1.45) de l'incertitude dynamique.

Une fois déterminés une allure et une expression rationnelle adéquates pour chaque fonction de pondération, il faut s'assurer que le problème  $H_\infty$  résultant est solvable par les algorithmes décrits en section 7. Autrement dit, que les paramètres de  $P(s)$  donnés par (2.35) satisfont (A1)-(A3). Cette exigence est purement technique et liée aux limites de validité de la solution présentée en section 7. Si ces hypothèses tombent, le problème est toujours soluble mais le calcul d'une solution requiert des outils beaucoup plus lourds.

En inspectant la réalisation minimale (2.35) de  $P$ , on remarque les faits suivants (avec les notations standard (2.10)):

- $P_{21}(s) = I$ ,
- $D_{12} = \begin{pmatrix} -D_{w_1}D_G \\ D_{w_2} \\ D_{w_3}D_G \\ -D_G \end{pmatrix}$ ,
- les modes de  $A_{w_1}, A_{w_2}, A_{w_3}$  sont des modes inobservables de  $(C_2, A)$ .

Il en résulte les contraintes suivantes sur  $G$  et les fonctions de pondération:

- (a)  $w_1, w_2, w_3$  doivent être stables. Tout pôle instable invaliderait en effet l'hypothèse " $(C_2, A)$  détectable".
- (b) Ni  $G$ , ni  $w_1, w_2, w_3$  ne peuvent avoir de pôles sur l'axe imaginaires. En effet, tout pôle de

$$A = \begin{pmatrix} A_G & 0 & 0 & 0 \\ -B_{w_1}C_G & A_{w_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{w_2} & 0 \\ B_{w_3}C_G & 0 & 0 & A_{w_3} \end{pmatrix}$$

est un zéro de  $P_{21}(s) = I$ .

- (c) Si  $G$  est strictement propre, pour assurer que  $D_{12}$  est de rang plein il faut obligatoirement soit inclure une pondération  $w_2$  avec  $D_{w_2}$  de rang plein, soit utiliser une fonction  $w_3$  impropre choisie de sorte que  $w_3G$  soit propre et  $w_3G(\infty)$  soit de rang plein.

Ces contraintes sont assez restrictives en pratique. On ne peut pas traiter de systèmes  $G$  comportant un intégrateur. On ne peut pas non plus mettre d'intégrateur dans  $w_1$ , une astuce pourtant utile pour forcer un comportement intégrateur de  $K$ . On montre en effet que si  $G$  et  $w_1$  comportent respectivement  $n_G$  et  $n_1$  intégrateurs,  $K$  devra inclure au moins  $n_1 - n_G$  intégrateurs pour que  $\|w_1 S\|_\infty$  reste bornée. Enfin, le degré relatif de  $w_2$  ou  $w_3$  est fixé par celui de  $G$  d'après (c). Or, un choix logique pour  $w_3$  serait une fonction de transfert impropre (i.e., comportant une partie polynomiale) puisqu'on recherche en général un gain boucle ouverte nul en très haute fréquence. Un remède simple consiste à ajouter des pôles haute-fréquence à  $w_3(s)$  pour la rendre propre tout en maintenant un gain élevé sur la zone utile.

On notera enfin que la contrainte (a) n'interdit vraiment que les pôles sur l'axe imaginaire. Les pôles à partie réelle positive peuvent en effet être réfléchis par rapport à l'axe imaginaire sans modifier le module de  $w_i(j\omega)$ . Par exemple,  $w_1(s) = \frac{1}{(s-1)(s+2)}$  peut être remplacé par  $\hat{w}_1(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$  puisque

$$\left| \frac{w_1(j\omega)}{\hat{w}_1(j\omega)} \right| = \left| \frac{j\omega + 1}{j\omega - 1} \right| = \left| \frac{\omega^2 + 1}{\omega^2 + 1} \right|^{1/2} = 1.$$

Pour échapper aux restrictions imposées par (A1)-(A3), une pratique coutumière consiste à ne se préoccuper dans un premier temps que des spécifications du *loop shaping*, puis à "perturber" les pondérations obtenues pour les rendre compatibles avec les algorithmes. La modification effectuée doit être suffisamment faible pour ne pas trop compromettre les spécifications. Elle ne doit cependant pas être trop petite car on se heurte alors à des difficultés numériques liées à la proximité de problèmes singuliers.

### 2.3.3 Exemple de mise en œuvre

L'utilisation des techniques  $H_\infty$  pour le *loop shaping* et les détails pratiques de mise en œuvre sont illustrés sur l'exemple suivant.

**Exemple 2.3.1** Considérons le système physique simple de la Figure 2.3 constitué d'un ensemble masse-ressort soumis aux frottements de Coulomb  $F_c = -f\dot{x}$ .

On veut asservir ce système en position, c'est-à-dire faire suivre au centre de gravité  $x(t)$  de la masse une consigne  $r(t)$  arbitraire. Pour ce faire on dispose d'une mesure de la position  $x(t)$  et on peut exercer une commande en force  $u(t)$ . La commande  $u$  est calculée à partir de l'erreur  $e(t) = r(t) - x(t)$  et son application est sujette à un retard de  $T = 0.05$  s.

Les spécifications du problème sont les suivantes:

- Performance: gain en boucle ouverte supérieur à 40 dB de 0 à 1 rd/s et fréquence de coupure  $\omega_c \geq 5$  rd/s.



- Robustesse: robustesse au retard  $T$  et *roll-off* de 40 dB/dec au delà de 50 rd/s (à cause des dynamiques négligées et des bruits de mesure en haute fréquence).

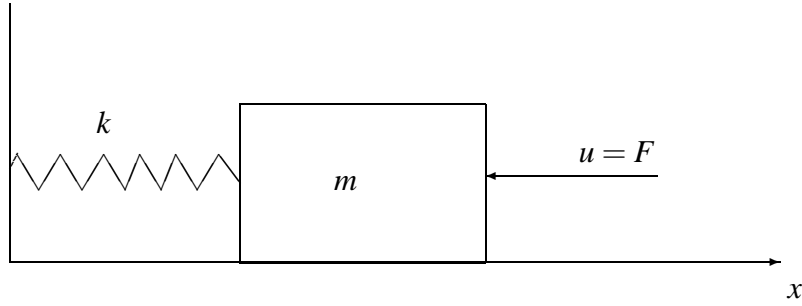


FIG. 2.3 – Système masse-ressort.

A partir de l'équation d'état  $m\ddot{x}(t) + f\dot{x}(t) + kx(t) = u(t)$ , on obtient comme transfert entrée/sortie:

$$G_0(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{1}{ms^2 + fs + k} = \frac{1}{k} \frac{1}{1 + 2\zeta \frac{s}{\omega_0} + \frac{s^2}{\omega_0^2}} \quad (2.38)$$

où

- $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  est la pulsation propre,
- $\zeta = \frac{\omega_0 f}{2k} = \frac{1}{2} \frac{f}{\sqrt{km}}$  est le facteur d'amortissement.

Ces notations sont standard pour les systèmes du second ordre. On utilisera les valeurs numériques  $m = 0.01$  kg,  $k = 1$  N/m et  $f = 0.002$  N.s/m d'où

$$\omega_0 = 10 \text{ rd/s}; \quad \zeta = 0.01.$$

Si  $K(s)$  est le compensateur utilisé, la commande  $u_c(t)$  calculée à l'instant  $t$  vérifie  $U_c(s) = K(s)X(s)$ . A cause du retard cependant, la commande *effectivement appliquée* à l'instant  $t$  est

$$u(t) = u_c(t - T),$$

soit en terme de transformée de Laplace:

$$U(s) = e^{-sT} U_c(s) = e^{-sT} K(s)X(s).$$

Pour synthétiser  $K(s)$ , il est commode d'inclure le retard dans le système dont la réponse devient alors:

$$G_{\text{exact}}(s) = \frac{1}{k} \frac{e^{-sT}}{1 + 2\zeta \frac{s}{\omega_0} + \frac{s^2}{\omega_0^2}}$$

La structure de la boucle de suivi correspondante est représentée en Figure 2.4.

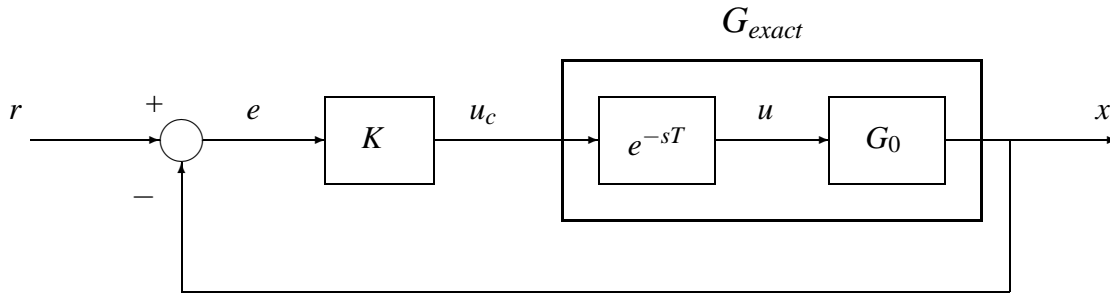


FIG. 2.4 – Boucle de suivi.

La fonction de transfert  $G_{exact}$  n'est pas rationnelle à cause du retard  $e^{-sT}$ . Comme  $T \ll 1$ , on fera l'approximation  $e^{-sT} \approx 1 - Ts$  et on prendra comme modèle "nominal" du système:

$$G(s) = \frac{1}{k} \frac{1 - Ts}{1 + 2\zeta \frac{s}{\omega_0} + \frac{s^2}{\omega_0^2}} = \frac{1 - 0.05s}{1 + 0.002s + 0.01s^2} \quad (2.39)$$

Le diagramme de Bode de ce transfert apparaît en Figure 2.5. On notera la résonance au voisinage de la pulsation propre  $\omega_0$ .

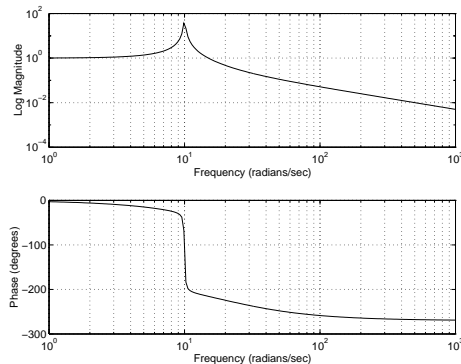


FIG. 2.5 – Diagramme de Bode du modèle.

Pour prendre en compte les spécifications on utilisera le critère  $\left\| \begin{pmatrix} w_1 S \\ w_3 T \end{pmatrix} \right\|_\infty$ . On commence par déterminer  $w_3$ . Le degré relatif de  $G$  étant  $-1$ ,  $w_3$  doit être de la forme  $w_3(s) = s \tilde{w}_3(s)$  avec  $\tilde{w}_3(s)$  propre et non nulle à l'infini. Comme  $\|w_3 T\|_\infty <$

1 assure la robustesse de la stabilité face aux erreurs dynamiques multiplicatives bornées par  $|w_3(j\omega)|$  (voir Table 1.1), on choisira  $|w_3(j\omega)|$  comme un majorant de l'erreur multiplicative

$$\Delta(j\omega) = \frac{G_{exact}(j\omega) - G(j\omega)}{G(j\omega)}$$

commise en approximant le retard. Enfin,  $w_3$  doit se comporter comme  $s^2$  de 50 à 100 rd/s environ pour assurer un *roll-off* en  $1/s^2$ . Au delà on aura automatiquement une pente en  $s^{-2}$  puisque  $G(s)$  et  $K(s)$  sont strictement propres. Après quelque tâtonnements, on trouve qu'un choix raisonnable est

$$w_3(s) = 0.002 \frac{s^2}{1 + 0.001s}$$

On a bien le comportement en  $s^2$  jusqu'à 100 rd/s et la comparaison avec le module de l'erreur multiplicative  $\Delta$  est favorable (voir Figure 2.6).

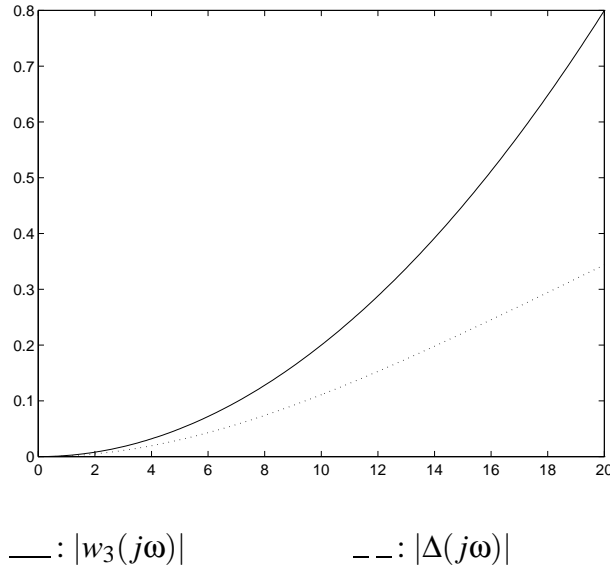


FIG. 2.6 – Comparaison des modules de  $\Delta$  et  $w_3$ .

Le choix de  $w_1(s)$  est dicté par les spécifications de performance. Étant donnée la bonne connaissance du modèle en basse fréquence on négligera l'aspect robustesse des performances. On veut  $|GK(j\omega)| \geq 40 \text{ dB} = 100$  pour  $\omega \leq 1$ , soit approximativement  $|S(j\omega)| \leq \frac{1}{100}$ . On peut donc chercher  $w_1$  de la forme

$$w_1(s) = 100 \left( \frac{\omega_1}{s + \omega_1} \right)^2$$

où  $\omega_1$  sera utilisé pour régler la fréquence de coupure. Notons que  $|w_1(j\omega)| = 1$  pour  $\omega \approx 10 \omega_1$  et que la fréquence de coupure de  $GK$  correspondra approximativement à celle de  $w_1$ . Par conséquent on cherchera  $\omega_1$  aux environs de 0.5 rd/s.

L'algorithme de  $\gamma$ -itération fournit les valeurs suivantes de  $\gamma_{opt}$  pour trois valeurs test de  $\omega_1$ :

$$\begin{aligned}\omega_1 = 0.7 &\longrightarrow \gamma_{opt} \approx 1.18 (> 1) \\ \omega_1 = 0.6 &\longrightarrow \gamma_{opt} \approx 0.98 (> 1) \\ \omega_1 = 0.5 &\longrightarrow \gamma_{opt} \approx 0.79 (< 1)\end{aligned}$$

Retenons le compensateur obtenu pour  $\omega_1 = 0.5$  et  $\gamma = 1$ :

$$K(s) = 2.08 \frac{(s+1000)(s+4.04)(1+0.002s+0.01s^2)}{(s+43)(s+0.5)^2(7.5+0.21s+0.01s^2)}. \quad (2.40)$$

Le diagramme de Bode du gain de boucle  $GK$  est tracé en Figure 2.7. La fréquence de coupure est  $\omega_c = 8$  rd/s. Enfin, l'allure des modules de  $S$  et  $T$  (en valeur naturelles) est visible en Figure 2.8.

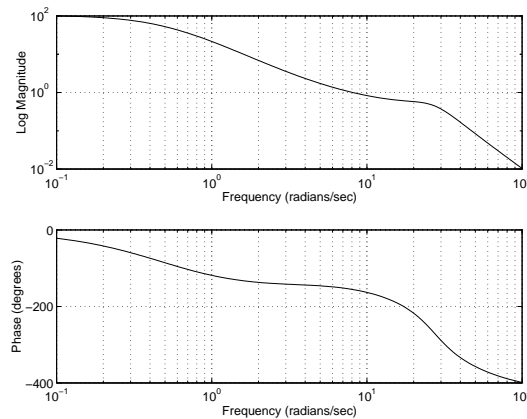
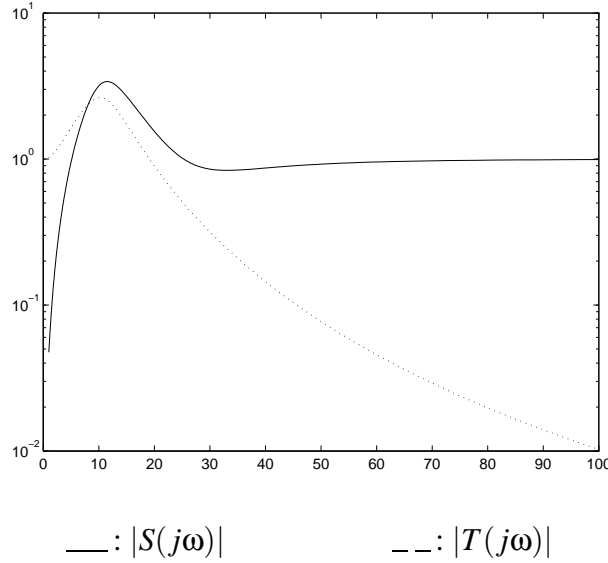


FIG. 2.7 – Réponse en boucle ouverte ( $GK$ ).

FIG. 2.8 – Allure de  $|S|$  et  $|T|$ .

### 2.3.4 Faiblesses du compensateur central

L'exemple 2.3.1 met en évidence certaines propriétés indésirables du compensateur central. La Figure 2.9 compare les amplitudes des réponses de  $G$  et de  $K$ . On constate que  $K$  se comporte comme un réjecteur calé sur la pulsation propre  $\omega_0$  du système. Autrement dit,  $K$  place des zéros là où  $G$  a un mode résonnant de façon à en annuler l'effet et à aplanir  $GK$ . On dit que  $K$  "inverse" le système  $G$ . Ce comportement est confirmé par les expressions (2.39) de  $G$  et (2.40) de  $K$  où l'on constate une simplification exacte du terme

$$1 + 2\zeta \frac{s}{\omega_0} + \frac{s^2}{\omega_0^2} = 1 + 0.002s + 0.01s^2$$

entre le numérateur de  $K$  et le dénominateur de  $G$ . D'une manière générale, on montre que  $K$  simplifie exactement tous les pôles stables de  $G$ ,  $w_2$  et  $w_3$ .

Un tel comportement est indésirable en présence de **modes souples**, c'est-à-dire de modes faiblement amortis associés à des résonances mécaniques, électriques ou autres. En effet, le compensateur obtenu est calé trop précisément sur la pulsation propre  $\omega_0$  pour être robuste à un déplacement de cette pulsation. De tels déplacements sont pourtant courants en pratique, qu'ils soient dus à une mesure imparfaite de la raideur  $k$  et du coefficient de frottement  $f$  ou à une variation de ces paramètres. Qualitativement, un tel déplacement est équivalent à une variation  $\Delta K$  qui désajusterait le compensateur. Cette variation est amplifiée par le module de  $\frac{G}{1+KG}$  d'après la Table 1.1. Le tracé de ce module en Figure 2.10 révèle un pic marqué au

voisinage de  $\omega_0$ . La stabilité et les performances en boucle fermée seront donc très peu robustes aux perturbations de la commande ayant une composante fréquentielle autour de  $\omega_0$ , et donc à un déplacement de  $\omega_0$ .

Ce manque de robustesse de la stabilité est également flagrant lorsqu'on regarde les modes de la représentation interne du système bouclé. Le calcul du spectre de la matrice d'état  $A_{BF}$  en (1.30) donne en effet

$$\{-5.0 \pm 10.4, -22.5, -16.3 \pm 4.1i, -0.10 \pm 9.99i\}.$$

On reconnaît en dernière position la paire de modes simplifiés dans le produit  $GK$  (ce sont les racines de  $1 + 2\zeta\frac{s}{\omega_0} + \frac{s^2}{\omega_0^2}$ ). Ces modes faiblement amorties n'apparaissent pas dans la relation entrée/sortie car ils sont inobservables en boucle fermée. Ils n'en font pas moins partie de la dynamique du système et peuvent être excités par certaines perturbations, notamment les perturbations  $w_i$  de la commande. Leur caractère néfaste est évident lorsqu'on regarde l'effet d'une impulsion perturbatrice unitaire  $w_i$  sur la sortie  $y$  (voir Figure 2.11). On constate une amplification importante de cette perturbation et une réjection très lente et fortement oscillatoire.

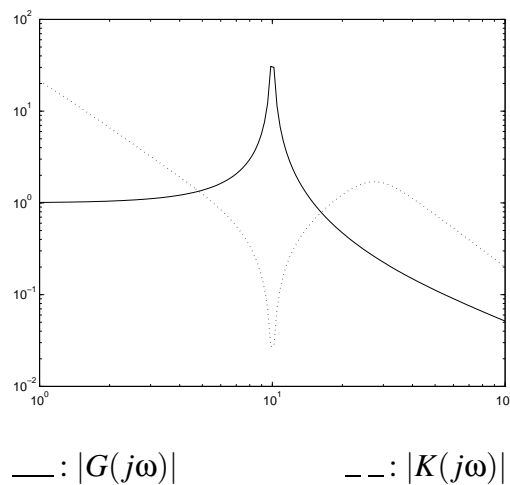


FIG. 2.9 – Allure de  $|G|$  et  $|K|$ .

Enfin, l'extrême sensibilité à un déplacement de  $\omega_0$  est confirmée par le fait qu'un déplacement de 5% vers la gauche suffit à déstabiliser le système bouclé: pour  $\omega_0 = 9.5$  rd/s la boucle fermée exhibe les deux modes instables  $0.75 \pm 9.22i$ . Par contre, un déplacement vers la droite améliore la stabilité et réduit la sensibilité aux perturbations de  $u$  (l'amplitude maximale de  $\frac{G}{1+KG}$ ). La réponse boucle ouverte est tracée pour  $\omega_0 = 9.5$  rd/s et  $\omega_0 = 10.5$  rd/s en Figure 2.12 et 2.13. Au voisinage de 10 rd/s, on remarque sur le tracé d'amplitude un pic suivi ou précédé d'un trou. Cette allure est caractéristique d'une pair pôle/zéro résonante qui se quasi-simplifie.

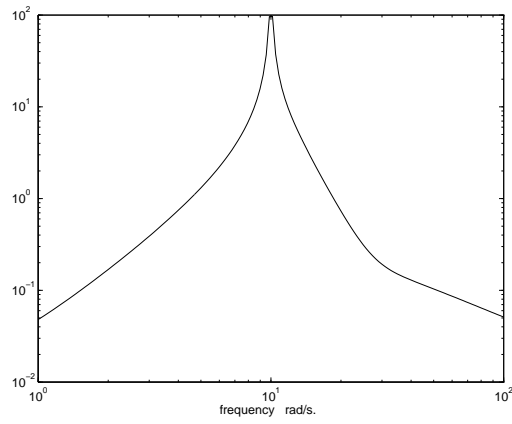


FIG. 2.10 – Amplitude de  $\frac{G}{1+KG}(j\omega)$ .

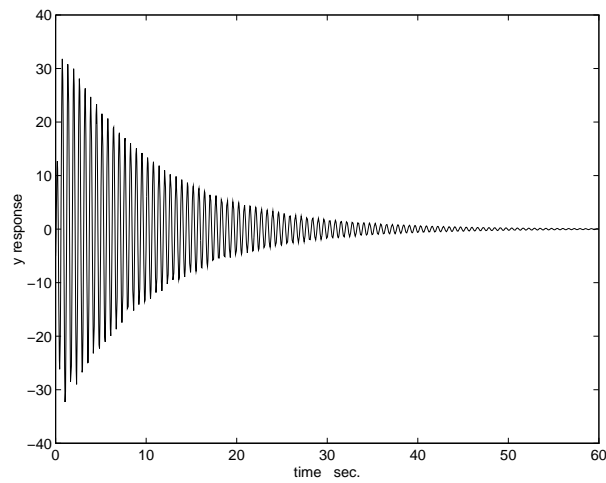


FIG. 2.11 – Réjection d'une impulsion perturbatrice sur la commande.

La quasi-simplification introduit un déphasage important qui peut déstabiliser le système. C'est le cas pour  $\omega_0 = 9.5$  rd/s où l'on traverse  $-180^\circ$  au voisinage de 0 dB.

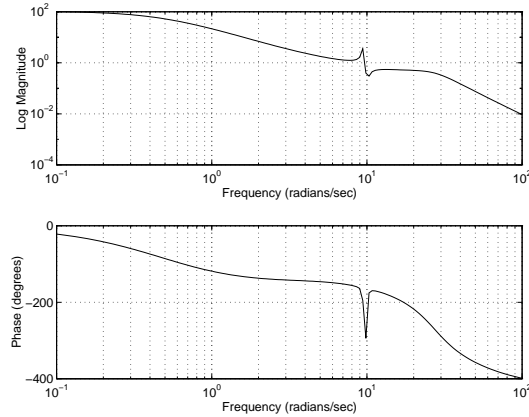


FIG. 2.12 – Réponse boucle ouverte  $GK(j\omega)$  pour  $\omega_0 = 9.5$  rd/s.

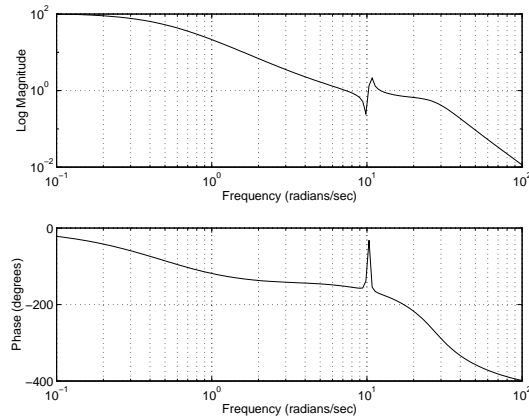


FIG. 2.13 – Réponse boucle ouverte  $GK(j\omega)$  pour  $\omega_0 = 10.5$  rd/s.

### 2.3.5 Comment prévenir les simplifications exactes?

Le critère de sensibilité mixte  $\left\| \begin{pmatrix} w_1 S \\ w_2 KS \\ w_3 T \end{pmatrix} \right\|_\infty < 1$  produit donc un compensateur central qui tend à simplifier exactement les modes stables du système  $G$ . Pour



éviter ce comportement indésirable en présence de modes souples, on peut changer de critère et utiliser plutôt  $\left\| \begin{pmatrix} w_4 \Sigma \\ w_5 G \Sigma \\ w_6 K G \Sigma \end{pmatrix} \right\|_\infty < 1$  où  $\Sigma = (I + KG)^{-1}$ . La pondération  $w_5$  permet alors de contrôler l'amplitude maximale de  $G \Sigma = G(I + KG)^{-1}$  et donc d'interdire la simplification exacte de modes souples. Toute simplification exacte s'accompagne en effet d'un pic de  $G \Sigma$  autour du mode résonant simplifié (voir Figure 2.10).

L'exemple 2.3.1 est repris ci-dessous et traité à l'aide de ce nouveau critère. Si l'on cherche à limiter la norme de  $G(I + KG)^{-1}$  aux alentours de 0 dB, il apparaît rapidement que les performances basses fréquences et la fréquence de coupure spécifiées sont irréalisables. On doit donc les relaxer et l'on aboutit après quelques tâtonnements au compromis suivant:

$$\begin{aligned} w_4(s) &= -0.7 + 100 \left( \frac{\omega_1}{s + \omega_1} \right)^4 \quad \text{avec } \omega_1 = 0.3 \\ w_5(s) &= 0.5 \\ w_6(s) &= 1.0 + \frac{8s}{s + 1000}. \end{aligned}$$

Pour ces données l'optimum  $H_\infty$  est  $\gamma_{opt} \approx 1.34$  et en prenant  $\gamma = 1.4$  on obtient le compensateur central suivant:

$$K(s) = 1.46 \frac{(s + 0.66)(s + 1000)(s^2 + s + 0.6)(s^2 - 2.6s + 31.5)}{(s^2 + 2.4e2s + 2.2e4)(s + 0.8)^4}.$$

Son profil de gain est comparé à celui du système  $G$  en Figure 2.14. On remarquera que le zéro de  $K$  est maintenant décalé par rapport à la pulsation propre  $\omega_0 = 10$  de  $G$ .

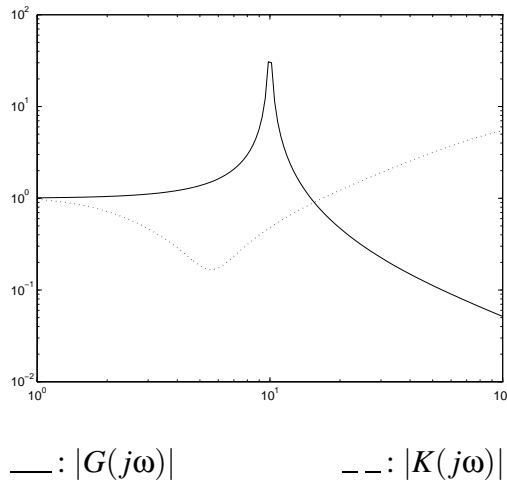


FIG. 2.14 – Allure de modules de  $G$  et  $K$ .

La réponse en boucle ouverte  $GK$  apparaît en Figure 2.15 et les modules des fonctions de transfert en boucle fermée  $S$ ,  $GS$  et  $T$  sont tracés en Figure 2.16.

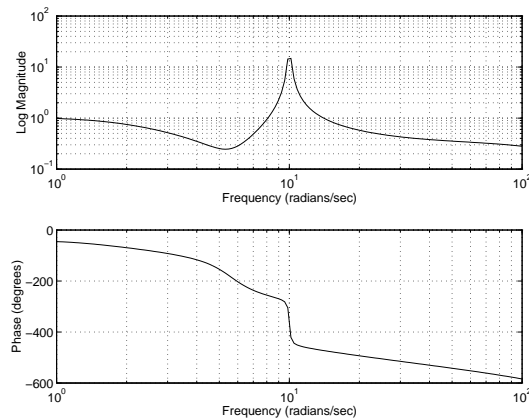


FIG. 2.15 – Réponse en boucle ouverte  $GK$ .

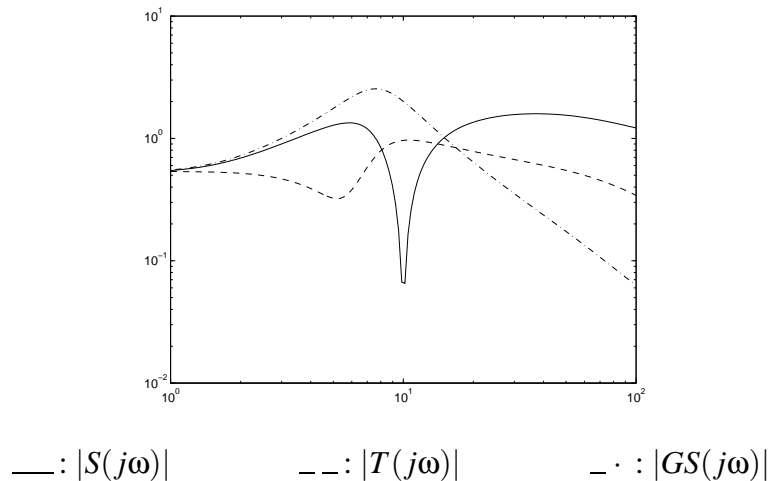


FIG. 2.16 – Réponses en boucle fermée.

Ce compensateur s'avère beaucoup plus robuste aux variations de la pulsation propre  $\omega_0$  puisque le système asservi peut tolérer des déplacements de 25 % de  $\omega_0$  sans perte de stabilité. Les réponses pour une impulsion excitatrice sont présentées sur la Figure 2.17 pour les valeurs de  $\omega_0$  de 10 et 7.5. On appréciera l'amélioration de ces réponses à une excitation perturbatrice en comparaison avec le premier design (voir Section 8.3 et Figure 2.11).

Enfin, on notera qu'un autre remède plus systématique consiste à renoncer au compensateur central et chercher une meilleure alternative parmi les autres com-

pensateurs  $H_\infty$  sous-optimaux. A performances égales on cherchera le compensateur qui amortit le mieux les modes résonants. Ce problème peut être résolu par des techniques d'optimisation convexe.

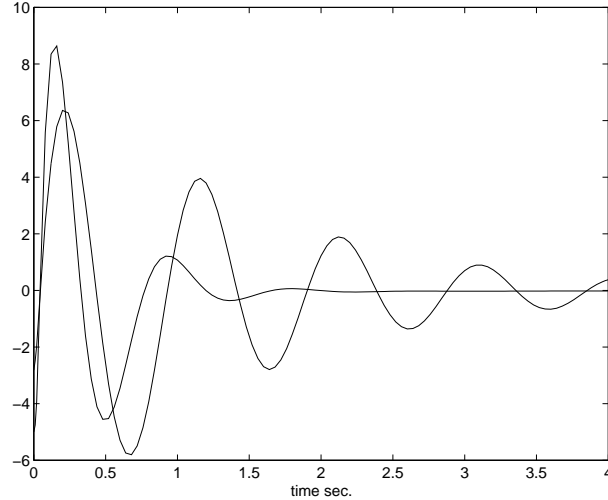


FIG. 2.17 – Réponses impulsionnelles.

## 2.4 Techniques LMI pour la synthèse $H_\infty$

En dehors de l'approche fondée sur les équations algébriques de Riccati et des techniques utilisant des représentations en transfert, il existe une approche plus récente pour la résolution du problème  $H_\infty$ . Il s'agit des techniques LMI (Linear Matrix Inequalities). Ces dernières utilisent une formulation du problème en termes d'inégalités matricielles linéaires en les variables  $X$  et  $Y$  introduites précédemment. Du fait de la linéarité, l'ensemble ainsi décrit est convexe et il résulte de cette propriété que l'on peut aisément et avec une grande efficacité calculatoire extraire une solution particulière. Sans décrire à nouveau la technique, nous donnons ici quelques éléments de la théorie développée par P. Gahinet et P. Apkarian dans [19]. Dans le cadre  $H_\infty$ , les techniques LMI utilisent le lemme fondamental suivant.

**Lemme 2.4.1** Soit un système  $T(s)$  ayant une réalisation en espace d'état donnée par

$$T(s) := C(sI - A)^{-1}B + D.$$

Les assertions suivantes sont alors équivalentes.

- (i)  $\|T(s)\|_\infty < \gamma$  et  $A$  est stable,

(ii) *il existe une matrice symétrique  $X$  définie positive  $X > 0$  solution de l'inégalité matricielle linéaire*

$$\begin{pmatrix} A^T X + XA & XB & C^T \\ B^T X & -\gamma I & D^T \\ C & D & -\gamma I \end{pmatrix} < 0. \quad (2.41)$$

Ce résultat est connu sous la forme du Lemme de Kalman-Popov-Yacubovich et est démontré dans [31]. Il est facile de voir que l'ensemble des solutions de (2.41) constitue un ensemble convexe dont on peut extraire une solution par des techniques d'optimisation très performantes. Le principe de la démonstration pour le problème de synthèse  $H_\infty$  consiste à appliquer le lemme précédent au système bouclé puis à manipuler la condition obtenue jusqu'à obtenir des conditions plus simples. On peut raisonnablement espérer obtenir des LMI puisqu'elles constituent une autre caractérisation de la norme  $H_\infty$ . Ces manipulations détaillées dans [19] conduisent au résultat suivant.

**Théorème 2.4.2** *Il existe un compensateur  $K(s)$  solution du problème  $H_\infty$  suboptimal de performance  $\gamma$ , si et seulement si il existe des matrices symétriques  $X$  et  $Y$  solution du problème LMI*

$$\left[ \begin{array}{c|c} \mathcal{N}_X & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right]^T \left[ \begin{array}{cc|c} XA + A^T X & XB_1 & C_1^T \\ B_1^T X & -\gamma I & D_{11}^T \\ \hline C_1 & D_{11} & -\gamma I \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c} \mathcal{N}_X & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right] < 0 \quad (2.42)$$

$$\left[ \begin{array}{c|c} \mathcal{N}_Y & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right]^T \left[ \begin{array}{cc|c} YA^T + AY & YC_1^T & B_1 \\ C_1 Y & -\gamma I & D_{11} \\ \hline B_1^T & D_{11}^T & -\gamma I \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c} \mathcal{N}_Y & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right] < 0 \quad (2.43)$$

$$\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} > 0. \quad (2.44)$$

où  $\mathcal{N}_X$  et  $\mathcal{N}_Y$  sont des bases des noyaux des matrices  $[C_2 \quad D_{21}]$  et  $[B_2^T \quad D_{12}^T]$ .

Le système de LMI ci-dessus peut être aisément résolu par des algorithmes de programmation (convexe) semi-définie. Les avantages immédiats de la formulation LMI sont les suivants:

- Les hypothèses **(A2)** et **(A2)** qui étaient nécessaires à la technique DGKF deviennent inutiles ici. On peut donc utiliser la formulation LMI avec une plus grande liberté que l'approche classique.
- Les contraintes précédentes définissent un ensemble de solutions et non plus un point isolé, on peut donc utiliser cet arbitraire pour obtenir des compensateurs de nature différente du compensateur central de la méthode DGKF. En

particulier, on a la possibilité de limiter la dynamique du compensateur et de mieux négocier les cancellations pôles-zéros entre le système et le compensateur. Ces simplifications pôles-zéros sont souvent sources de problèmes dans les applications. Ces différents points sont discutés en détail dans [19].

Lorsqu'on dispose d'une solution des contraintes LMI (2.42)-(2.44), le compensateur associé est directement obtenu par des relations algébriques [19].

## Bibliographie

- [1] Doyle, J.C., "Analysis of Feedback Systems with Structured Uncertainties," *IEE. Proc.*, vol. 129, pt D (1982), pp. 242-250.
- [2] Doyle, J.C., Glover, K., Khargonekar, P., and Francis, B., "State-Space Solutions to Standard  $H_2$  and  $H_\infty$  Control Problems," *IEEE Trans. Aut. Contr.*, AC-34 (1989), pp. 831-847.
- [3] Basar, T., and P. Bernhard,  *$H_\infty$ -Optimal Control and Related Minimax Design Problems - A Dynamic Game Approach*, Birkhauser, Boston, 1991.
- [4] Boyd, S.P., and C.H. Barratt, *Linear Controller Design: Limits of Performance*, Prentice-Hall, 1991.
- [5] Doyle, J.C., B.A. Francis, and A.R. Tannenbaum, *Feedback Control Theory*, Macmillan Publishing Company, New York, 1992.
- [6] Francis, B., *A course in  $H_\infty$  Control Theory*, Lecture Notes in Control and Information Sciences No. 88, Springer Verlag, Berlin-New York, 1987.
- [7] McFarlane, D.C., and K. Glover, *Robust Controller Design Using Normalized Coprime Factor Plant Descriptions*, Lecture Notes on Control and Information Sciences, vol. 128, Springer-Verlag, 1990.
- [8] Stoorvogel, A., *The  $H_\infty$  Control Problem: a State-Space Approach*, Prentice Hall International, Hemel Hempstead, U.K., 1992.
- [9] Doyle, J.C. and G. Stein, "Multivariable Feedback Design: Concepts for a Classical/Modern Synthesis," *IEEE Trans. Aut. Contr.*, AC-26 (1981), pp. 4-16.
- [10] Doyle, J.C., *Lecture Notes on Advances in Multivariable Control*, Technical Report, Honeywell, Minneapolis, 1984.
- [11] Freudenberg, J.C. and D.P. Looze, "Relation between Properties of Multivariable Feedback Systems at Different Loop-Breaking Points: Part I," *Proc. CDC*, 1985, pp. 250-256.
- [12] Freudenberg, J.C. and D.P. Looze, "Relation between Properties of Multivariable Feedback Systems at Different Loop-Breaking Points: Part II," *Proc. Amer. Contr. Conf.*, 1986, pp. 771-777.

- [13] Freudenberg, J.C. and D.P. Looze, "Right-Half Plane Poles and Zeros and Design Tradeoffs in Feedback Systems," *IEEE Trans. Aut. Contr.*, AC-30 (1985), pp. 555-565.
- [14] Freudenberg, J.C. and D.P. Looze, "The Relation between Open-Loop and Closed-Loop Properties of Multivariable Feedback Systems," *IEEE Trans. Aut. Contr.*, AC-31 (1986), pp. 333-340.
- [15] Stein, G. and J.C. Doyle, "Beyond Singular Values and Loop Shapes," *J. Guidance*, 14 (1991), pp. 5-16.
- [16] Bernstein, D.S., and W.M. Haddad, "LQG Control with an  $H_\infty$  Performance Bound: a Riccati Equation Approach," *IEEE Trans. Aut. Contr.*, AC-34 (1989), pp. 293-305.
- [17] Chiang, R.Y. and M.G. Safonov, "Modern CACSD Using the Robust Control Toolbox," *Proc. Conf. Aerospace and Computational Contr.*, Oxnard, CA, 1989.
- [18] Doyle, J.C., Glover, K., Khargonekar, P., and Francis, B., "State-Space Solutions to Standard  $H_2$  and  $H_\infty$  Control Problems," *IEEE Trans. Aut. Contr.*, AC-34 (1989), pp. 831-847.
- [19] Gahinet, P. and P. Apkarian, "A Linear Matrix Inequality Approach to  $H_\infty$  Control," *Int. J. Robust and Nonlinear Contr.*, vol. 4, (1994) pp. 421-448.
- [20] Glover, K. and J.C. Doyle, "State-space Formulae for all Stabilizing Controllers that Satisfy an  $H_\infty$ -norm Bound and Relations to Risk Sensitivity," *Syst. Contr. Letters*, 11 (1988), pp. 167-172.
- [21] Glover, K. and D. Mustafa, "Derivation of the Maximum Entropy  $H_\infty$ -Controller and a State-Space Formula for its Entropy," *Int. J. Contr.*, 50 (1989), pp. 899-916.
- [22] Glover, K., D.J.N. Limebeer, J.C. Doyle, E.M. Kasenally, and M.G. Safonov, "A Characterization of all Solutions to the Four-Block General Distance Problem," *SIAM J. Contr. Opt.*, 29 (1991), pp. 283-324.
- [23] Khargonekar, P.P., and M.A. Rotea, "Mixed  $H_2/H_\infty$  Control: a Convex Optimization Approach," *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 39 (1991), pp. 824-837.
- [24] Kwakernaak, H., "A Polynomial Approach to Minimax Frequency Domain Optimization of Multivariable Feedback Systems," *Int. J. Contr.*, 44 (1986), pp. 117-156.
- [25] Kwakernaak, H., "The Polynomial Approach to  $H_\infty$ -Optimal Regulation," Lecture Notes of the 1990 CIME Course on Recent Developments in  $H_\infty$  Control Theory, Como, Italy, 1990.
- [26] Limebeer, D.J.N., B.D.O. Anderson, P.P. Khargonekar, and M. Green, "A Game-Theoretic Approach to  $H_\infty$  Control for Time-Varying Systems," *SIAM J. Contr. Opt.*, 30 (1992), pp. 262-283.

- [27] Mustafa, D. and K. Glover, "Controller which Satisfy a Closed-Loop  $H_\infty$ -Norm Bound and Maximize an Entropy Integral," *Proc. CDC*, 1988, pp. 959-964.
- [28] Peterson, I.R., B.D.O. Anderson, and E.A. Jonckheere, "A First Principles Solution to the Non-Singular  $H_\infty$  Control Problem," *Int. J. of Robust and Nonlinear Control*, 1 (1991), pp. 171-185.
- [29] Sampei, M., T. Mita, and M. Nakamichi, "An Algebraic Approach to  $H_\infty$  Output Feedback Control Problems," *Syst. Contr. Letters*, 14 (1990), pp. 13-24.
- [30] Safonov, M.G., D.J. Limebeer and R.Y. Chiang, "Simplifying the  $H_\infty$  Theory via Loop-Shifting, Matrix-Pencil and Descriptor Concepts," *Int. J. Contr.*, 50 (1989), pp. 2467-2488.
- [31] Scherer, C., *The Riccati Inequality and State-Space  $H_\infty$ -Optimal Control*, Ph.D Thesis, University of Wurzburg, Germany, 1990.
- [32] Scherer, C., " $H_\infty$  Optimization without Assumptions on Finite or Infinite Zeros," *SIAM J. Contr. Opt.*, 30 (1992), pp. 143-166.
- [33] Sefton, J. and K. Glover, "Pole/Zero Cancellations in the General  $H_\infty$  Problem with Reference to a Two Block Design," *Syst. Contr. Letters*, 14 (1990), pp. 295-306.
- [34] Stoorvogel, A.A., "The Singular  $H_\infty$  Control Problem with Dynamic Measurement Feedback," *SIAM J. Contr. Opt.*, 29 (1991), pp. 160-184.
- [35] Tsai, M.C., E.J.M. Geddes, and I. Postlethwaite, "Pole-Zero Cancellations and Closed-Loop Properties of an  $H_\infty$  Mixed-Sensitivity Design Problem," *Proc. CDC*, 1990, pp. 1028-1029.
- [36] Whittle, P., "Risk-Sensitive Linear/Quadratic/Gaussian Control," *Adv. Appl. Prob.*, 13 (1981), pp. 764-777.
- [37] Apkarian, P., and J.C. Morris, "Robust Modal Controllers: New  $H_\infty/\mu$  Synthesis Structures," 1992.
- [38] Apkarian, P., and P. Gahinet, "A Convex Characterization of Parameter Dependent  $H_\infty$  Controllers," submitted to *IEEE Trans. Aut. Contr.*, December 1992.
- [39] Doyle, J.C., J.E. Wall, and G. Stein, "Performance and Robustness Analysis for Structured Uncertainty," *Proc. CDC*, 1982, pp. 629-636.
- [40] Haddad, W.M. and D.S. Bernstein, "Explicit Construction of Quadratic Lyapunov Functions for the Small Gain, Positivity, Circle, and Popov Theorems and their Application to Robust Stability," *Proc. CDC*, 1991, pp. 2618-2623.
- [41] Stein, G. and J.C. Doyle, "Beyond Singular Values and Loop Shapes," *J. Guidance*, 14 (1991), pp. 5-16. 49 (1989), pp. 2215-2240.
- [42] Khargonekar, P.P., I.R. Petersen, and K. Zhou, "Robust Stabilization of Uncertain Linear Systems: Quadratic Stability and  $H_\infty$  Control Theory," *IEEE Trans. Aut. Contr.*, AC-35 (1990), pp. 356-361.



- 
- [43] Balas, G. J., and J. C. Doyle, "Robust Control of Flexible Modes in the Controller Crossover Region," *Proc. Amer. Contr. Conf.*, 1989.
- [44] Chang, B.C., X.P. Li, S.S. Banda, and H.H. Yeh, "Design of an  $H_\infty$  Optimal Controller by Using DGKF's State-Space Formulas," *Proc. CDC*, 1990, pp. 2632-2633.
- [45] Kuraoko, H., N. Ohka, M. Ohba, S. Hosoe, and F. Zhang, "Application of H-Infinity Design to Automotive Fuel Control," *IEEE Contr. Syst. Mag.*, 1990, pp. 102-106.
- [46] Safonov, M.G. and R.Y. Chiang, "CACSD Using the State-Space  $L_\infty$  Theory: A Design Example," *Proc. Conf. on CACSD*, 1986, pp. 95-101.
- [47] Safonov, M.G. and R.Y. Chiang, "CACSD Using the State-Space  $L_\infty$  Theory: A Design Example," *IEEE Trans. Aut. Contr.*, AC-33 (1988), pp. 477-479.
- [48] Safonov, R.Y. Chiang and H. Flashner, " $H_\infty$  Robust Control Synthesis for a Large Space Structure," *Proc. Amer. Contr. Conf.*, Atlanta, GA, 1988, pp. 2038-2045.
- [49] Bruisma, N.A., and M. Steinbuch, "A Fast Algorithm to Compute the  $H_\infty$ -Norm of a Transfer Function Matrix," *Syst. Contr. Letters*, 14 (1990), pp. 287-293.
- [50] Chiang, R.Y. and M.G. Safonov, "Robust Control Toolbox," So. Natick, MA, MathWorks, 1988.
- [51] Gahinet, P. and P. Pandey, "A Fast and Numerically Robust Algorithm for Computing the  $H_\infty$  Optimum," *Proc. CDC*, 1991, pp. 200-205.
- [52] Robel, G., "On Computing the Infinity Norm," *IEEE Trans. Aut. Contr.*, AC-34 (1989), pp. 882-884.
- [53] Scherer, C., " $H_\infty$ -Control by State-Feedback and Fast Algorithms for the Computation of Optimal  $H_\infty$ -Norms," *IEEE Trans. Aut. Contr.*, AC-35 (1990), pp. 1090-1099.
- [54] Shen, T., and T. Tamura, "Properties of Algebraic Riccati Inequalities and  $H_\infty$  Robust Suboptimal Controller Design," *Proc. CDC*, pp. 212-213, 1991.



## Chapitre 3

# Techniques de $\mu$ -analyse et de $\mu$ synthèse

On synthétise a priori une loi de commande sur un modèle nominal du processus. On veut vérifier a posteriori que la boucle fermée demeure stable (voire performante) en présence des inévitables erreurs de modélisation.

On fait l'hypothèse que le processus (modèle + incertitudes de modèle associées) est linéaire invariant dans le temps. Les erreurs de modélisation peuvent être de deux types, à savoir des incertitudes paramétriques (incertitudes sur la valeur des paramètres physiques du processus) et des dynamiques mal connues ou négligées (méconnaissance de la dynamique haute fréquence en entrée et en sortie du processus). La  $\mu$  analyse fournit un cadre général pour l'étude de la robustesse d'une boucle fermée soumise à ces deux types d'incertitudes de modèle.

Nous introduisons graduellement le problème d'analyse de la stabilité robuste dans les deux premiers paragraphes (robustesse paramétrique, robustesse aux dynamiques négligées, cas général). La valeur singulière structurée (VSS)  $\mu$  est définie formellement nous nous intéressons ensuite au problème de la performance robuste. On traite également du problème de mise sous forme de LFT de processus paramétriquement incertains, puis nous introduisons des algorithmes pour le calcul effectif de la VSS. Enfin, dans une dernière partie de ce chapitre, nous exploitons cet outil d'analyse pour définir une technique de synthèse systématique de compensateurs robustes: c'est la  $\mu$  synthèse.

### 3.1 Cas particulier de la robustesse paramétrique

Avant d'envisager le cas d'incertitudes générales, nous examinons tout d'abord le cas d'incertitudes paramétriques.

#### 3.1.1 Obtention du schéma d'interconnection standard

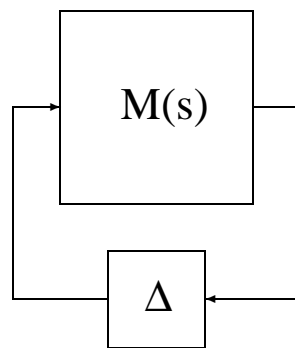


FIG. 3.1 – Schéma d'interconnection standard pour la  $\mu$  analyse.

Considérons une boucle fermée soumise à différentes perturbations de modèle (incertitudes paramétriques + dynamiques négligées). Si l'on désire appliquer les techniques de  $\mu$  analyse, la première étape consiste à transformer cette boucle fermée de façon à se ramener au schéma d'interconnection standard  $M(s) - \Delta$  de la figure 3.1

La matrice  $\Delta$  contient les incertitudes de modèle. La matrice de transfert  $M(s)$  contient la boucle fermée nominale ainsi que les effets des incertitudes sur la boucle fermée. Par construction, le schéma d'interconnection  $M(s) - \Delta$  est asymptotiquement stable si et seulement si la boucle fermée originale soumise aux différentes incertitudes de modèle est elle même asymptotiquement stable.

Dans le cadre de ce paragraphe, nous nous intéressons brièvement à une méthode d'obtention du schéma d'interconnection standard dans le cas particulier d'incertitudes purement paramétriques de modèle (nous reviendrons plus complètement sur cette méthode en 3.5).

Supposons que les incertitudes paramétriques  $\delta_i$  entrent de façon affine dans les équations d'état du processus à commander :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A_0 + \sum_i A_i \delta_i)x + (B_0 + \sum_i B_i \delta_i)u \\ y &= (C_0 + \sum_i C_i \delta_i)x + (D_0 + \sum_i D_i \delta_i)u \end{aligned} \quad (3.1)$$

$\delta_i \in [-1,1]$  représente la variation *normalisée* du  $i$ ème paramètre incertain. La méthode de Morton [8] (que nous détaillerons plus loin) permet de mettre le processus à commander sous la forme d'une LFT  $y = F_L(H(s),\Delta)u$ , où  $u$  et  $y$  sont les entrées et sorties du processus (voir figure 3.2).

$\Delta$  est alors une matrice diagonale de la forme :

$$\Delta = \text{diag}(\delta_i I_{q_i}) \quad (3.2)$$

le scalaire  $\delta_i$  est donc répété  $q_i$  fois, où  $q_i$  est le rang de la matrice augmentée  $P_i$  :

$$P_i = \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

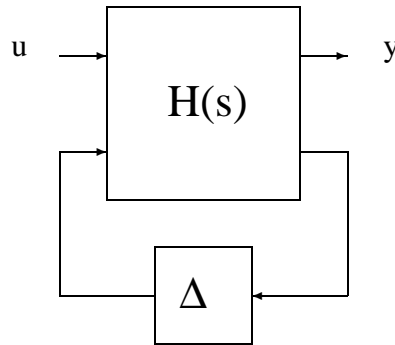


FIG. 3.2 – mise sous forme de LFT du processus incertain.

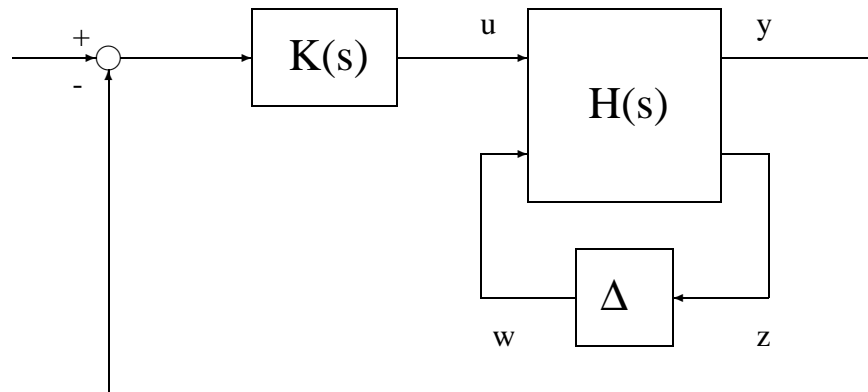


FIG. 3.3 – Obtention du schéma d'interconnection standard.

L'idée est donc de rajouter des entrées / sorties fictives, de façon à faire apparaître les incertitudes sous forme d'un retour interne au processus. De fait, il suffit

maintenant de connecter les entrées / sorties  $u$  et  $y$  du processus incertain (voir figure 3.2) avec les entrées / sorties du correcteur (voir figure 1.3) pour obtenir le schéma d'interconnection standard de la figure 3.1 :  $M(s)$  correspond sur la figure 3.3 à la matrice de transfert vue par la perturbation  $\Delta$  de modèle, c'est à dire au transfert entre les entrées  $w$  et les sorties  $z$ .

Par construction, les pôles de la boucle fermée originale soumise aux différentes incertitudes  $\delta_i$  de modèle coïncident avec les pôles de la boucle fermée correspondant au schéma d'interconnection  $M(s) - \Delta$ , avec  $\Delta = \text{diag}(\delta_i I_{q_i})$ .

Voici un exemple simple dans lequel un système en régime autonome est représenté par une forme  $M(s) - \Delta$ . Considérons l'équation d'un système mécanique

$$m_0 \ddot{x} + f_0(1 + \delta_2) \dot{x} + k_0(1 + \delta_1)x = 0$$

où  $\delta_1, \delta_2$  désignent des incertitudes relatives sur le frottement et la raideur, respectivement. Une représentation d'état équivalente de ce système est donnée par

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(1 + \delta_1)k_0/m_0 & -(1 + \delta_2)f_0/m_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

On vérifie alors directement que ce système est complètement équivalent à la forme  $M(s) - \Delta$  décrite comme suit. La représentation d'état de  $M(s)$  est donnée par:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k_0/m_0 & -f_0/m_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -k_0/m_0 & -f_0/m_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (3.5)$$

L'incertitude intervient à travers la relation de feedback:

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 \\ 0 & \delta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

### 3.1.2 Introduction à la $\mu$ analyse réelle

On introduit maintenant l'hypercube unité  $H$  dans l'espace des paramètres  $\delta_i$  :

$$D = \{ \delta = [\delta_1 \dots \delta_n] \mid \delta_i \in \mathbb{R} \text{ et } |\delta_i| \leq 1 \} \quad (3.6)$$

On peut alors formuler le problème soit comme un test de robustesse ("la boucle fermée de la figure 3.1 est elle stable quels que soient les paramètres incertains à l'intérieur de  $H$ ?"), soit comme un calcul de la marge de robustesse ("Quelle est la plus grande valeur  $k_{max}$  de  $k$  telle que la boucle fermée soit stable à l'intérieur de l'hypercube  $kD$ ?").

On peut résoudre le deuxième problème en cherchant la plus petite valeur de  $k$

pour laquelle la boucle fermée devient marginalement stable (un ou plusieurs pôles sur l'axe imaginaire) pour une incertitude paramétrique à l'intérieur de  $kH$ .

On rappelle tout d'abord le lien entre les polynômes caractéristiques de la boucle ouverte ( $P_{BO}(s, \delta)$ ) et de la boucle fermée ( $P_{BF}(s, \delta)$ ) dans le cas de la figure 3.1 :

$$\frac{P_{BF}(s, \delta)}{P_{BO}(s, \delta)} = \frac{\det(I - k\Delta M(s))}{\det(I - k\Delta M(\infty))} \quad (3.7)$$

On suppose que  $\delta \in H$  et on se souvient que  $\Delta = \text{diag}(\delta_i I_{q_i})$ . On fait ensuite croître la valeur de  $k$  à partir de 0 : dans la mesure où la boucle fermée nominale est supposée asymptotiquement stable (ce qui conduit à une matrice de transfert  $M(s)$  asymptotiquement stable), on peut affirmer que la boucle fermée devient marginalement stable avant de devenir instable (du fait de la continuité des racines du polynôme  $P_{BF}(s, \delta)$  en fonction du vecteur  $\delta$  de paramètres incertains).

Au vu de l'équation (3.7), on peut d'autre part constater le lien entre la singularité de la matrice  $I - k\Delta M(j\omega_0)$  et la présence d'un pôle de la boucle fermée sur l'axe imaginaire en  $\pm j\omega_0$ .

Tout ceci nous conduit à définir la valeur singulière structurée  $\mu(M(j\omega))$  à la pulsation  $\omega$  comme :

$$\mu(M(j\omega)) = \{ \min(k / \exists \delta \in kD \text{ avec } \Delta = \text{diag}(\delta_i I_{q_i}) \text{ et } \det(I - \Delta M(j\omega)) = 0) \}^{-1}$$

On notera d'autre part que  $\mu(M(j\omega))$  est choisi égal à 0 s'il n'existe pas de perturbation structurée de modèle  $\Delta = \text{diag}(\delta_i I_{q_i})$  vérifiant  $\det(I - \Delta M(j\omega)) = 0$ .

De fait,  $1/\mu(M(j\omega))$  peut être interprété comme la taille de la plus petite incertitude paramétrique  $\delta$  qui amène un pôle de la boucle fermée sur l'axe imaginaire en  $\pm j\omega$ . La marge de robustesse  $k_{max}$  peut ensuite être obtenue comme :

$$k_{max} = \min_{\omega \in [0, \infty]} 1/\mu(M(j\omega)) \quad (3.8)$$

$k_{max}$  correspond à la taille de la plus petite incertitude paramétrique  $\delta$  qui amène un pôle de la boucle fermée sur l'axe imaginaire.

**Remarque :** il existe plusieurs raisons pour lesquelles on préfère manipuler la VSS  $\mu(M(j\omega))$  plutôt que la marge de stabilité multivariable  $1/\mu(M(j\omega))$ . On peut déjà remarquer que la VSS  $\mu(M(j\omega))$  ne peut prendre de valeur infinie (du fait de l'hypothèse d'une boucle fermée nominale asymptotiquement stable), alors que la marge de stabilité multivariable peut devenir infinie (s'il n'existe pas de perturbation structurée de modèle capable de déstabiliser la boucle fermée). Nous verrons par ailleurs

que la VSS peut être également considérée comme une extension de notions algébriques classiques, à savoir le rayon spectral et la valeur singulière maximale d'une matrice (voir paragraphes 3.3.2 et 3.6).

### 3.1.3 Choix des pondérations sur les incertitudes

Le schéma d'interconnexion de la figure 3.1 contient implicitement des pondérations sur les différentes incertitudes paramétriques, de façon à considérer des incertitudes normalisées  $\delta_i$  entre -1 et +1. Ces pondérations jouent un rôle critique en pratique, comme nous l'illustrons maintenant.

Reprenons le cas d'incertitudes paramétriques  $\theta_i$  entrant de façon affine dans les équations d'état du processus à commander :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A_0 + \sum_i A_i \theta_i)x + (B_0 + \sum_i B_i \theta_i)u \\ y &= (C_0 + \sum_i C_i \theta_i)x + (D_0 + \sum_i D_i \theta_i)u \end{aligned} \quad (3.9)$$

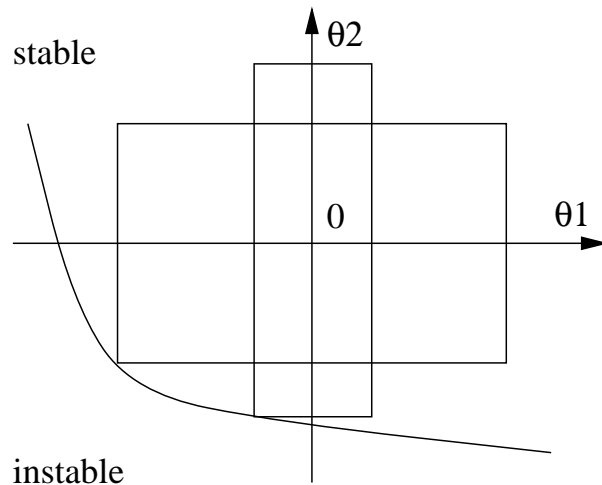


FIG. 3.4 – Domaines de stabilité garantis dans l'espace des paramètres incertains (le point 0 correspond à la valeur nominale des paramètres).

On fait l'hypothèse que chacun des  $\theta_i$  appartient à un intervalle fixé a priori  $[\underline{\theta}_i, \bar{\theta}_i]$ , et on pose  $\delta_i = a_i + b_i \theta_i$ , en choisissant les  $a_i$  et  $b_i$  de façon à se ramener à  $\delta_i \in [-1, 1]$ .

Dans un souci de simplicité, on considère le cas de 2 paramètres  $\theta_1$  et  $\theta_2$ . De fait, on peut diviser l'espace des  $\theta_i$  en deux sous espaces, selon que la boucle fermée



est stable ou instable en un point donné de ce sous espace. La frontière entre ces 2 sous-espaces correspond au cas où la boucle fermée est marginalement stable (voir figure 3.4).

Rappelons que la  $\mu$  analyse nous permet de garantir la stabilité à l'intérieur d'un hypercube  $kH$  dans l'espace des paramètres incertains *normalisés*  $\delta_i$ <sup>1</sup>. De fait, cet hypercube correspond à un rectangle dans l'espace des  $\theta_i$ <sup>2</sup>. Si l'on joue sur les longueurs spécifiées a priori des intervalles (i.e. sur la valeur de  $\bar{\theta}_i - \underline{\theta}_i$ ), on constate que différents choix de ces longueurs conduisent à différents rectangles de stabilité dans l'espace des  $\theta_i$  (voir figure 3.4).

## 3.2 Cas général

Le cas général que nous examinons ci-dessous correspond au cas d'incertitudes de différentes natures qui peuvent apparaître simultanément dans le schéma de commande.

### 3.2.1 Cas d'une seule dynamique négligée

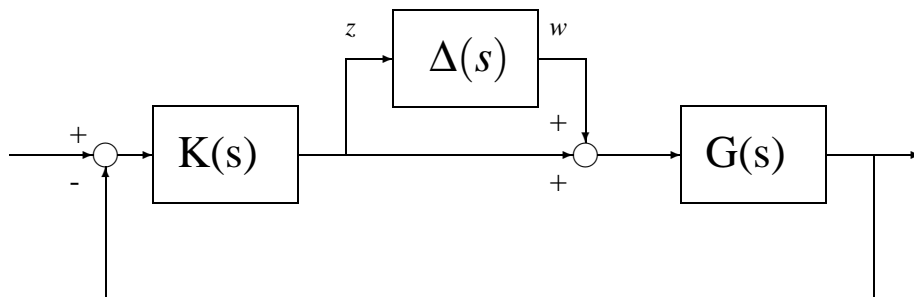


FIG. 3.5 – Cas d'une dynamique négligée.

On considère dans un premier temps le cas d'une seule dynamique négligée, correspondant à une matrice de transfert inconnue  $\Delta(s)$ , présente en entrée du processus à commander (voir figure 3.5). Cette dynamique négligée peut en particulier représenter une incertitude sur la dynamique haute fréquence des actionneurs<sup>3</sup>. Il est très facile de se ramener au schéma d'interconnection standard  $M(s) - \Delta(s)$ , en considérant que  $M(s)$  correspond au transfert entre les entrées  $w$  et les sorties  $z$ .

1. i.e.  $\delta_i \in [-k, k]$

2. i.e.  $\theta_i \in [k\underline{\theta}_i, k\bar{\theta}_i]$

3. De façon plus réaliste, il faudrait rajouter une pondération fréquentielle pour pouvoir moduler la méconnaissance de la dynamique des actionneurs en fonction du domaine de fréquences - voir chapitre ???.

Si l'on travaille à la fréquence  $\omega$ , on peut déjà remarquer que la matrice de transfert  $\Delta(s)$  devient une matrice complexe  $\Delta(j\omega)$  sans structure particulière (par opposition, la matrice  $\Delta$  définie par l'équation (3.2) possédait une structure très particulière puisque  $\Delta$  était diagonale). On appelle une telle matrice complexe sans structure particulière un "bloc complexe plein".

D'autre part, comme on l'a vu dans le chapitre ???, le théorème du petit gain appliqué au schéma  $M(s) - \Delta(s)$  fournit une condition nécessaire et suffisante de stabilité de la boucle fermée à chaque fréquence  $\omega$  :

$$\bar{\sigma}(\Delta(j\omega)) \leq \frac{1}{\bar{\sigma}(M(j\omega))} \quad (3.10)$$

### 3.2.2 Cas de plusieurs dynamiques négligées

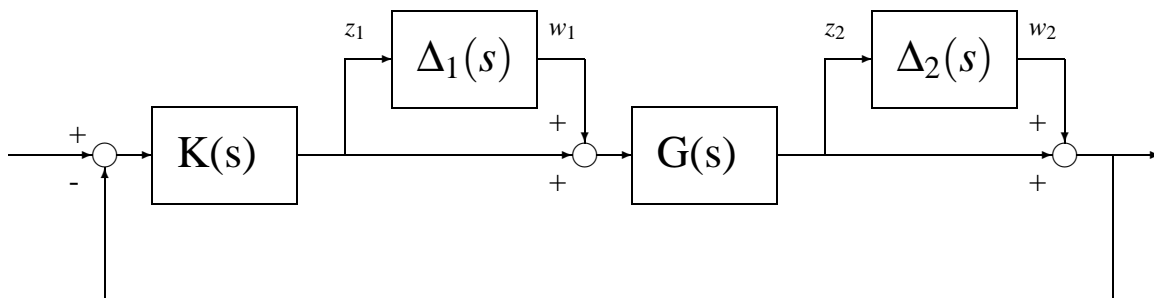


FIG. 3.6 – Cas de 2 dynamiques négligées.

On considère maintenant l'exemple de deux dynamiques négligées  $\Delta_1(s)$  et  $\Delta_2(s)$  présentes en entrée et en sortie du processus à commander (voir figure 3.6). Ces dynamiques négligées peuvent permettre de prendre simultanément en compte des incertitudes sur la dynamique haute fréquence des actionneurs et des capteurs.

Pour se ramener au schéma d'interconnection standard  $M(s) - \Delta(s)$ , il suffit de remarquer que  $M(s)$  correspond au transfert entre les entrées  $(w_1, w_2)$  et les sorties  $(z_1, z_2)$ . La matrice  $\Delta(s)$  correspondante s'écrit par ailleurs :

$$\Delta(s) = \begin{bmatrix} \Delta_1(s) & 0 \\ 0 & \Delta_2(s) \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

On travaille à la fréquence  $\omega$ , de sorte que les matrices de transfert  $\Delta_i(s)$  deviennent des blocs complexes pleins  $\Delta_i(j\omega)$ . Au vu de l'équation (3.11), la matrice  $\Delta(j\omega)$  apparaît maintenant structurée, puisqu'elle est diagonale par blocs. De ce fait, l'application du théorème du petit gain au schéma  $M(s) - \Delta(s)$  fournira un résultat conservatif, puisque l'on ne va pas prendre en compte la structure particulière de

$\Delta(s)$  (i.e. on va faire l'hypothèse que  $\Delta(j\omega)$  est un bloc complexe plein).

Plus généralement, si l'on dispose de  $m$  blocs de dynamiques négligées disséminés dans la boucle fermée, on peut comme précédemment se ramener au schéma d'interconnection standard  $M(s) - \Delta(s)$ , avec :

$$\Delta(s) = \text{diag}(\Delta_1(s), \dots, \Delta_m(s)) \quad (3.12)$$

Comme dans le cas d'incertitudes paramétriques, on travaille à une fréquence  $\omega$  donnée et on montre que la présence d'un pôle sur l'axe imaginaire en  $\pm j\omega$  se traduit par la singularité de la matrice  $I - \Delta(j\omega)M(j\omega)$ .

On définit plus précisément la boule unité de matrices de transfert  $B\Delta(s)$  :

$$B\Delta(s) = \{\Delta(s) = \text{diag}(\Delta_1(s), \dots, \Delta_m(s)) \mid \|\Delta(s)\|_\infty \leq 1\} \quad (3.13)$$

A la fréquence  $\omega$ , cette boule unité devient :

$$B\Delta(j\omega) = \{\Delta(j\omega) = \text{diag}(\Delta_1(j\omega), \dots, \Delta_m(j\omega)) \mid \bar{\sigma}(\Delta(j\omega)) \leq 1\} \quad (3.14)$$

En raison de la structure diagonale par blocs de  $\Delta$ , les relations  $\|\Delta(s)\|_\infty \leq 1$  et  $\bar{\sigma}(\Delta(j\omega)) \leq 1$  se traduisent par  $\|\Delta_j(s)\|_\infty \leq 1$  et  $\bar{\sigma}(\Delta_j(j\omega)) \leq 1$  pour chacune des dynamiques négligées.

On introduit la VSS  $\mu(M(j\omega))$  à la pulsation  $\omega$  comme :

$$\begin{aligned} \mu(M(j\omega)) &= \{\min(k \mid \exists \Delta(j\omega) \in kB\Delta(j\omega) \text{ avec } \det(I - \Delta(j\omega)M(j\omega)) = 0)\}^{-1} \\ &= 0 \quad \text{s'il n'existe pas une telle paire } (k, \Delta(j\omega)) \end{aligned}$$

Comme précédemment, la marge de robustesse  $k_{max}$  est obtenue comme l'inverse de la VSS maximale sur le domaine de fréquences (voir équation (3.8)). Cette marge de robustesse  $k_{max}$  est maintenant définie comme la plus grande valeur de  $k$ , telle que la boucle fermée demeure stable en présence de dynamiques négligées  $\Delta_j(s)$  vérifiant  $\|\Delta_j(s)\|_\infty \leq k$ .

### 3.2.3 Cas général

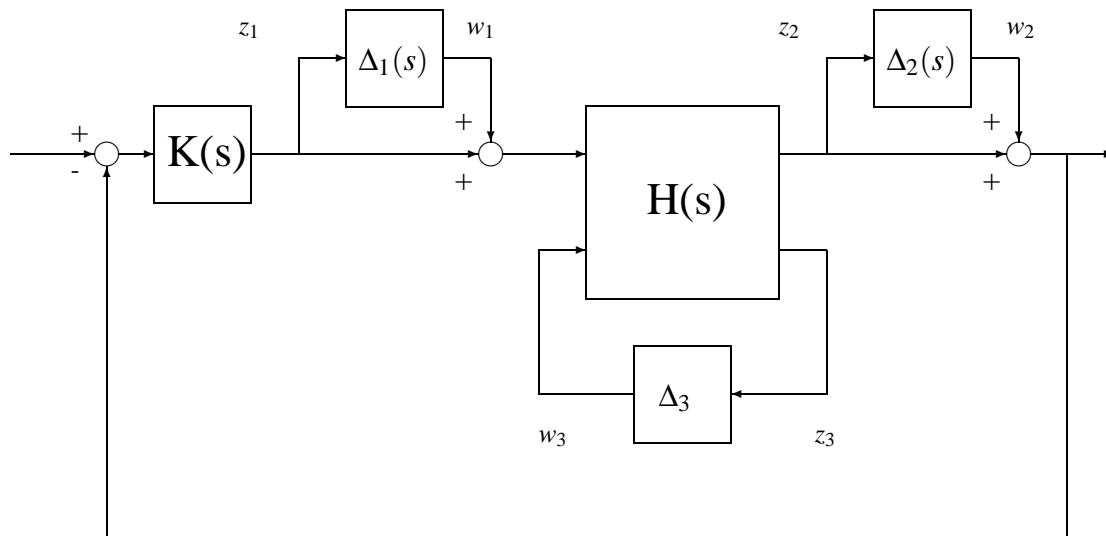


FIG. 3.7 – Cas général.

On traite dans un premier temps le problème des incertitudes paramétriques, en mettant le processus à commander sous forme de LFT. On boucle ensuite avec le correcteur et on rajoute les dynamiques négligées en différents points de la boucle fermée. On peut alors se ramener au schéma d'interconnexion standard  $M(s) - \Delta(s)$  en considérant que  $M(s)$  correspond au transfert vu par la perturbation structurée de modèle  $\Delta(s)$ .

Dans le cas de la figure 3.7, on pose :

$$\Delta_3 = \text{diag}(\delta_1 I_{q_1}, \dots, \delta_r I_{q_r}) \quad (3.15)$$

$\Delta(s)$  s'écrit alors:

$$\Delta(s) = \text{diag}(\Delta_1(s), \Delta_2(s), \delta_1 I_{q_1}, \dots, \delta_r I_{q_r}) \quad (3.16)$$

D'autre part, la matrice de transfert  $M(s)$  correspond au transfert entre les entrées  $(w_1, w_2, w_3)$  et les sorties  $(z_1, z_2, z_3)$ . D'un point de vue qualitatif, dans l'équation (3.16), on peut penser aux paramètres réels incertains  $\delta_i$  comme à des gains statiques, tandis que les dynamiques négligées  $\Delta_j(s)$  correspondent à des matrices de transfert.

### 3.3 Définition de la VSS

Nous introduisons maintenant de façon formelle la VSS  $\mu_\Delta(M)$  associée à une matrice complexe  $M$  et à une perturbation structurée de modèle  $\Delta$ . En pratique, la matrice complexe  $M$  peut typiquement correspondre à la valeur d'une matrice de transfert  $M(s)$  en  $s = j\omega$ .

#### 3.3.1 Notations et définitions

Soit  $\Delta$  la perturbation structurée de modèle :

$$\Delta = \text{diag}(\delta_1 I_{k_1}, \dots, \delta_{m_r} I_{k_{m_r}}, \Delta_1^C, \dots, \Delta_{m_C}^C) \quad (3.17)$$

Cette perturbation contient donc  $m_r$  scalaires réels  $\delta_i$  (éventuellement répétés si  $k_i > 1$ ) et  $m_C$  blocs complexes pleins  $\Delta_j^C$  (de dimension  $k_j^C$ ). La structure de la perturbation est donc entièrement définie par les entiers  $m_r, m_C, (k_i)_{i \in [1, m_r]}$  et  $(k_j^C)_{j \in [1, m_C]}$ .

Au vu des paragraphes précédents, les scalaires  $\delta_i$  représentent des incertitudes paramétriques, tandis que les blocs complexes pleins  $\Delta_j^C$  représentent des dynamiques négligées à une pulsation  $\omega$  donnée.

Si  $\Delta$  ne contient que des blocs complexes pleins (resp. des scalaires réels éventuellement répétés), on parle de perturbation *complexe* (resp. *réelle*) de modèle. Si  $\Delta$  contient simultanément des blocs complexes pleins et des scalaires réels, on parle alors de perturbation *mixte*<sup>4</sup>.

On introduit maintenant la boule unité  $B\Delta$  dans l'espace de la perturbation structurée  $\Delta$  :

$$B\Delta = \{\Delta \mid \bar{\sigma}(\Delta) \leq 1\} \quad (3.18)$$

Notons que la relation  $\bar{\sigma}(\Delta) \leq 1$  se traduit par  $\delta_i \in [-1, 1]$  pour les scalaires réels et par  $\bar{\sigma}(\Delta_j^C) \leq 1$  pour les blocs complexes pleins. On définit enfin la VSS comme :

$$\begin{aligned} \mu_\Delta(M) &= \{\min(k \mid \exists \Delta \in kB\Delta \text{ avec } \det(I - \Delta M) = 0)\}^{-1} \\ &= 0 \quad \text{s'il n'existe pas } \det(k, \Delta) \end{aligned} \quad (3.19)$$

#### 3.3.2 Cas de perturbations de structure particulière

Si l'on considère une structure quelconque pour la perturbation  $\Delta$  de modèle, on ne dispose pas d'une expression analytique de la VSS  $\mu_\Delta(M)$ . Cependant, dans

4. Dans un souci de simplicité, on ne traite pas le cas plus général d'une perturbation  $\Delta$  contenant des scalaires réels (éventuellement répétés), des scalaires complexes répétés et des blocs complexes pleins (voire des blocs réels pleins).

le cas où  $\Delta$  correspond à un seul bloc complexe plein (resp. à seul scalaire réel répété), il s'avère que la VSS  $\mu_\Delta(M)$  coïncide avec la valeur singulière maximale  $\bar{\sigma}(M)$  (resp. le rayon spectral réel  $\rho_R(M)$ ).

Si  $\Delta$  correspond à un seul bloc complexe plein, il suffit de se reporter au chapitre ??? et au paragraphe 3.2.1 pour pouvoir affirmer que  $\mu_\Delta(M) = \bar{\sigma}(M)$ . On rappelle en effet que le théorème du petit gain fournit une condition nécessaire et suffisante de stabilité face à une perturbation non structurée de modèle.

On peut utiliser plus précisément le résultat suivant : si  $A$  est une matrice complexe, la taille de la plus petite perturbation complexe  $\Delta$ , qui rende singulière la matrice  $A + \Delta$ , vaut  $\underline{\sigma}(A)$ . Si l'on revient maintenant à notre problème initial, et si l'on fait l'hypothèse (forte) d'une matrice  $M$  inversible, la singularité de la matrice  $I - \Delta M$  est alors équivalente à la singularité de la matrice  $M^{-1} - \Delta$ . Dès lors, la taille de la plus petite perturbation non structurée  $\Delta$ , qui rende singulière la matrice  $I - \Delta M$ , est :

$$\underline{\sigma}(M^{-1}) = \frac{1}{\bar{\sigma}(M)} = \frac{1}{\mu_\Delta(M)} \quad (3.20)$$

Si  $\Delta$  correspond à un seul scalaire réel répété  $\delta I_r$ , nous allons montrer simplement que  $\mu_\Delta(M) = \rho_R(M)$ . On rappelle tout d'abord que le rayon spectral réel  $\rho_R(M)$  représente la valeur absolue de la plus grande valeur propre réelle de  $M$  :

$$\rho_R(M) = \max\{|\lambda_i(M)| \mid \lambda_i(M) \in R\} \quad (3.21)$$

$\rho_R(M)$  est pris égal à 0 si  $M$  ne possède pas de valeur propre réelle.

On peut déjà noter que la singularité de la matrice  $I - \Delta M$  se traduit par l'existence d'un vecteur  $x$  de norme unité vérifiant :

$$(I - \delta M)x = 0 \quad (3.22)$$

soit encore :

$$Mx = \frac{1}{\delta}x \quad (3.23)$$

$1/\delta$  et  $x$  correspondent donc à une valeur propre et à un vecteur propre de  $M$ . On a fait d'autre part l'hypothèse que  $\delta$  était un scalaire réel, dont on cherche à minimiser la taille. Au vu de la relation (3.23),  $\mu_\Delta(M)$  correspond donc à la valeur absolue de la plus grande valeur propre réelle de  $M$ .

### 3.3.3 Problèmes théoriques

#### Utilisation d'un maillage fréquentiel

En pratique, on calcule classiquement la VSS  $\mu_{\Delta}(M(j\omega))$  sur un nombre fini de fréquences  $(\omega_i)_{i \in [1, N]}$  et on en déduit la marge de robustesse  $k_{max}$  :

$$\frac{1}{k_{max}} = \max_{i \in [1, N]} \mu_{\Delta}(M(j\omega_i)) \quad (3.24)$$

On fait donc (de façon quelque peu abusive) une hypothèse de régularité de la VSS en fonction de la fréquence. Si l'on maille de façon suffisamment fine le domaine des fréquences, on obtient de fait de bons résultats dans beaucoup de cas pratiques (voir les exemples d'application - pilotage d'un avion ou d'un missile, ...).

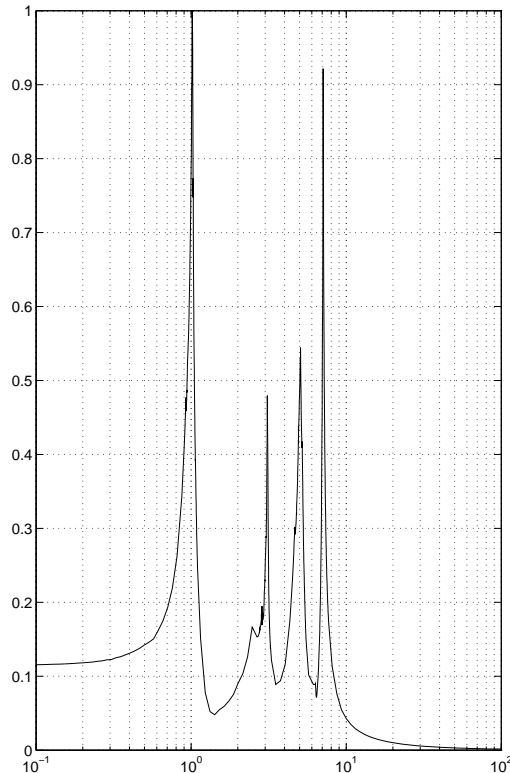


FIG. 3.8 – Exemple de courbe de variation de la VSS en fonction de la fréquence dans le cas de systèmes flexibles.

Notons cependant que l'on peut rencontrer des problèmes dans un certain nombre de cas spécifiques (structures flexibles en particulier) : le problème est plus précisément lié à la présence de pics hauts et fins sur la courbe de variation de

$\mu_{\Delta}(M(j\omega))$  en fonction de la fréquence  $\omega$  (voir figure 3.8). Du fait que la VSS  $\mu_{\Delta}(M(j\omega))$  varie trop rapidement en fonction de  $\omega$ , la technique classique consistant à utiliser un maillage fréquentiel ne peut plus être considérée comme fiable et on peut envisager alors de calculer directement la valeur maximale de la VSS sur un intervalle de fréquences. Les méthodes de résolution d'un tel problème sont cependant beaucoup plus délicates à manipuler. Il existe même des cas pathologiques, pour lesquels la VSS est une fonction discontinue de la fréquence. On rencontre en particulier ce genre de problèmes dans le cas de systèmes conservatifs (i.e. des systèmes du second ordre non amortis).

### Calcul d'un intervalle de la VSS

On calcule rarement en pratique la valeur exacte de la VSS : on calcule plus généralement un intervalle (i.e des bornes inférieure et supérieure). La raison première réside dans le caractère NP complet du problème [1]. On montre en effet qu'il ne peut pas exister d'algorithme calculant dans tous les cas la valeur exacte de la VSS en temps polynomial (i.e. avec un volume de calcul croissant de façon polynomiale avec la taille du problème).

De fait, il existe un certain nombre d'algorithmes de calcul d'une borne inférieure ou supérieure de la VSS dans le cas de perturbations de modèle complexe, réelle ou mixte. Ces algorithmes sont à temps polynomial ou exponentiel selon le cas. Nous présenterons en particulier dans le paragraphe 1.6 deux méthodes classiques permettant de calculer une borne inférieure [15] et une borne supérieure [5] de la VSS mixte en temps polynomial.

**Remarques :** référence (i) Lorsqu'on calcule un intervalle de la VSS, on ne peut très généralement pas garantir *a priori* l'écart entre les bornes inférieure et supérieure de la VSS.

(ii) Lorsqu'on manipule une *borne supérieure de la VSS*, on obtient in fine une borne inférieure  $k_L$  de la marge de robustesse  $k_{max}$ . Dans le cas d'une perturbation réelle de modèle, on peut donc *garantir* la stabilité de la boucle fermée à l'intérieur de l'hypercube  $k_L H$  (voir paragraphe 1.1).

(iii) On utilise assez typiquement une borne inférieure de la VSS pour mesurer le *conservatisme* de la borne supérieure : l'écart entre les deux bornes peut s'avérer assez faible sur des exemples réalistes (voir les exemples d'application ainsi que la [7]), de sorte que le résultat fourni par une borne supérieure de la VSS n'est pas nécessairement réellement conservatif.



## 3.4 Performance robuste

On peut définir la performance robuste de deux façons différentes. Dans le cas d'une perturbation structurée réelle de modèle, on peut s'intéresser à la robustesse du placement des pôles de la boucle fermée malgré des incertitudes sur les paramètres du processus (paragraphe 3.4.1).

Dans le cas plus général d'une perturbation structurée mixte de modèle, une autre solution consiste à vérifier que certaines matrices de transfert de la boucle fermée vérifient un gabarit en présence d'incertitudes paramétriques et de dynamiques négligées (paragraphe 3.4.3).

Pour pouvoir étudier ce deuxième problème, on introduit d'abord dans le paragraphe 3.4.2 un résultat fondamental de la  $\mu$  analyse, à savoir le théorème de la boucle principale. On utilise ensuite ce résultat pour transformer le problème d'analyse de la performance robuste en un problème augmenté d'analyse de la stabilité robuste, dans lequel on a rajouté un bloc complexe plein (ou plus généralement une perturbation complexe de modèle).

### 3.4.1 Robustesse d'un placement de pôles

Comme dans le paragraphe 3.1, nous faisons l'hypothèse que la perturbation structurée  $\Delta$  de modèle ne contient que des scalaires réels éventuellement répétés. Nous avons montré en particulier dans le paragraphe 3.1.2 que la  $\mu$  analyse avait pour but de détecter le passage sur l'axe imaginaire d'un des pôles de la boucle fermée.

Il s'agissait dès lors de calculer la VSS  $\mu_{\Delta}(M(j\omega))$  le long de l'axe imaginaire, pour en déduire ensuite la marge de robustesse  $k_{max}$ . Au vu de l'équation (3.7), on peut cependant remarquer que la singularité de la matrice  $I - \Delta M(s_0)$  traduit plus généralement la présence d'un pôle de la boucle fermée au point  $s_0$  du plan complexe.

Au lieu de considérer simplement le demi-plan gauche, l'idée est de considérer plus généralement d'autres types de régions  $\Omega$  du plan complexe. Si l'on fait l'hypothèse que les pôles de la boucle fermée nominale appartiennent à la région  $\Omega$ , on calcule ensuite la VSS sur la frontière de  $\Omega$  et on déduit la taille de la plus petite perturbation réelle de modèle, qui amène un pôle de la boucle fermée sur cette frontière.

De nombreuses régions  $\Omega$  sont a priori envisageables. Il peut s'agir par exemple du disque unité dans le cas d'une boucle fermée discrète. Dans le cas de systèmes continus, on peut choisir en particulier un secteur tronqué dans le plan complexe (voir figure 3.9). Dans ce dernier cas, la performance est alors définie en terme de valeurs minimales  $\xi_{min}$  et  $\alpha_{min}$  pour l'amortissement des pôles et le degré de stabi-

lité<sup>5</sup>.

Cette spécification peut traduire dans une certaine mesure des objectifs temporels, tels que le temps de réponse et le dépassement de la réponse indicielle ou la rapidité d'atténuation d'une perturbation agissant sur la boucle fermée.

---

5. Si  $A$  représente la matrice d'état de la boucle fermée, le degré de stabilité est défini par :  $\alpha = -\max_i \operatorname{Re}(\lambda_i(A))$  où  $\lambda_i(A)$  représente une valeur propre de  $A$ .

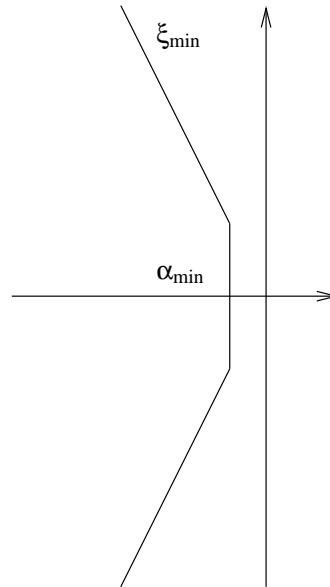


FIG. 3.9 – Etude de la robustesse d'un placement de pôles.

### 3.4.2 Théorème de la boucle principale

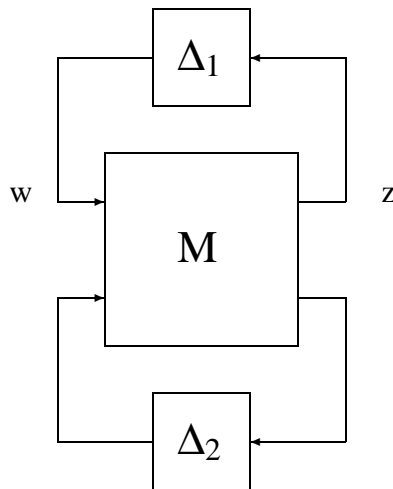


FIG. 3.10 – Problème augmenté pour l'étude de la performance robuste.

On considère le schéma d'interconnexion standard  $M(s) - \Delta$  (voir figure 1.1) et on scinde  $\Delta$  en deux perturbations mixtes de modèle  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  :

$$\Delta = \begin{bmatrix} \Delta_1 & 0 \\ 0 & \Delta_2 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

On travaille à une fréquence donnée, de sorte que  $M$  représente maintenant une matrice complexe. On partitionne  $M$  en accord avec l'équation (3.25) :

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Le fait d'avoir scindé  $\Delta$  en deux perturbations  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  nous permet de réécrire le schéma  $M(s) - \Delta$  de la figure 1.1 sous la forme équivalente de la figure 3.10.

Posons  $\Delta_1 = 0$  et notons  $F_l(M, \Delta_2)$  le transfert entre l'entrée  $w$  et la sortie  $z$  (voir figure 3.11). Nous pouvons maintenant énoncer le théorème de la boucle principale :

$$\mu_{\Delta}(M) < 1 \iff \begin{cases} \mu_{\Delta_2}(M_{22}) < 1 \\ \max_{\Delta_2 \in B_{\Delta_2}} \mu_{\Delta_1}(F_l(M, \Delta_2)) < 1 \end{cases} \quad (3.27)$$

Nous utilisons dans la suite le théorème de la boucle principale dans le cadre de l'étude de la performance robuste. Notons cependant que ce théorème a d'autres applications.

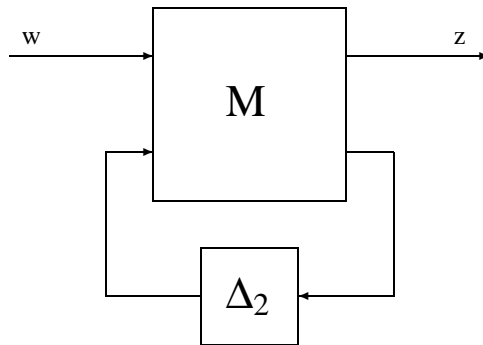


FIG. 3.11 – performance robuste.

### 3.4.3 Vérification d'un gabarit fréquentiel

Comme nous l'avons vu dans le chapitre ???, on peut définir un objectif de performance en terme de minimisation de la norme  $H_{\infty}$  d'une matrice de transfert. Si l'on définit par exemple un gabarit  $W_1$  sur la fonction de sensibilité  $S$  de la boucle fermée nominale, la performance nominale est assurée si :

$$\|W_1 S\|_{\infty} \leq 1 \quad (3.28)$$

On peut également définir un objectif de performance en terme de minimisation d'un signal d'erreur  $z(t)$  en réponse à une perturbation extérieure  $w(t)$ . Là encore,

si l'on note  $M_{11}$  le transfert entre  $w$  et  $z$ , la performance nominale est assurée si :

$$\|M_{11}\|_{\infty} \leq 1 \quad (3.29)$$

Si l'on introduit une perturbation structurée de modèle  $\Delta_2$  (voir figure 1.11), le transfert entre  $w$  et  $z$  correspond maintenant à la LFT  $F_l(M, \Delta_2)$ :

$$F_l(M, \Delta_2) = M_{11} + M_{12}\Delta_2(I - M_{22}\Delta_2)^{-1}M_{21} \quad (3.30)$$

où  $M$  est partitionné comme dans l'équation (3.26).

On travaille à une fréquence  $\omega$  donnée. On peut garantir la performance malgré une incertitude de modèle  $\Delta_2$  à l'intérieur de la boule unité  $B\Delta_2$  si et seulement si :

(i) la stabilité robuste de la boucle fermée est vérifiée :

$$\mu_{\Delta_2}(M_{22}(j\omega)) < 1 \quad (3.31)$$

(ii) le transfert entre  $w$  et  $z$  reste inférieur à 1 malgré l'incertitude de modèle  $\Delta_2$  :

$$\max_{\Delta_2 \in B\Delta_2} \bar{\sigma}(F_l(M(j\omega), \Delta_2)) < 1 \quad (3.32)$$

On introduit fictivement le bloc complexe plein  $\Delta_1$  (voir figure 1.10). Si l'on se réfère au paragraphe 3.3.2, on peut remarquer que :

$$\bar{\sigma}(F_l(M(j\omega), \Delta_2)) = \mu_{\Delta_1}(F_l(M(j\omega), \Delta_2)) \quad (3.33)$$

Considérons dès lors la perturbation augmentée de modèle  $\Delta$  (voir équation (3.25)). Le théorème de la boucle principale nous permet d'affirmer que les deux conditions précédentes sont vérifiées si et seulement si :

$$\mu_{\Delta}(M(j\omega)) < 1 \quad (3.34)$$

On peut donc ramener un problème d'analyse de la performance robuste à un problème augmenté d'analyse de la stabilité robuste, dans lequel on a rajouté un bloc fictif de performance  $\Delta_1$ . Ce bloc peut être éventuellement structuré : si les signaux  $w$  et  $z$  s'écrivent  $w = [w_1, \dots, w_m]^T$  et  $z = [z_1, \dots, z_m]^T$ , et si l'on ne s'intéresse qu'aux transferts entre les signaux scalaires  $w_i$  et  $z_i$ , le bloc de performance  $\Delta_1$  sera maintenant choisi diagonal.

### 3.5 Forme LFT pour les incertitudes paramétriques

On considère le cas d'incertitudes paramétriques  $\delta_i$  entrant de façon affine dans les équations d'état de la boucle fermée :

$$\dot{x} = (A_0 + \sum_{i=1}^N A_i \delta_i)x + (B_0 + \sum_{i=1}^N B_i \delta_i)u$$

$$y = (C_0 + \sum_{i=1}^N C_i \delta_i)x + (D_0 + \sum_{i=1}^N D_i \delta_i)u \quad (3.35)$$

avec  $\dim x = n$ ,  $\dim u = n_u$  et  $\dim y = n_y$ .

On peut réécrire les équations ci-dessus sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ y \end{pmatrix} = (P_0 + \sum_{i=1}^N P_i \delta_i) \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

avec ( $j \in [0, N]$ ):

$$P_j = \begin{bmatrix} A_j & B_j \\ C_j & D_j \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

Comme on l'a dit précédemment, l'idée consiste à rajouter des entrées / sorties fictives  $w$  et  $z$  supplémentaires, de façon à faire apparaître les incertitudes  $\delta_i$  sous forme d'un retour interne au processus ( $w = \Delta z$ , avec  $\Delta = \text{diag}(\delta_i I_{q_i})$ ).

On introduit donc le système augmenté :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ y \\ z \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} x \\ u \\ w \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_0 & B_0 & B' \\ C_0 & D_0 & D_{12} \\ C' & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \\ w \end{pmatrix} \quad (3.38)$$

ainsi que le retour interne au processus  $w = \Delta z$ .

Les matrices  $(A_0, B_0, C_0, D_0)$  correspondent au modèle nominal du processus ( $\delta = 0$ ). On cherche des matrices  $(B', C', D_{12}, D_{21}, D_{22})$  ainsi qu'une perturbation structurée  $\Delta$  de modèle vérifiant ( $\forall \delta \in R^N$ ):

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ y \end{pmatrix} = (P_0 + \sum_{i=1}^N P_i \delta_i) \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} = F_l(Q, \Delta) \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

La LFT  $F_l(Q, \Delta)$  s'écrit :

$$F_l(Q, \Delta) = Q_{11} + Q_{12} \Delta (I - Q_{22} \Delta)^{-1} Q_{21} \quad (3.40)$$

avec :

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

$$Q_{11} = \begin{bmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

$$Q_{12} = \begin{bmatrix} B' \\ D_{12} \end{bmatrix} \quad Q_{21} = [C' \ D_{21}] \quad Q_{22} = D_{22} \quad (3.43)$$

Eu égard à la linéarité des expressions en fonction des paramètres  $\delta_i$ , on peut d'ores et déjà poser  $Q_{22} = 0$ . On cherche donc maintenant des matrices  $Q_{21}$  et  $Q_{12}$  vérifiant:

$$\sum_{i=1}^N P_i \delta_i = Q_{12} \Delta Q_{21} \quad (3.44)$$

Soit  $q_i$  le rang de la matrice  $P_i$ . On peut factoriser  $P_i$  sous la forme :

$$P_i = \begin{bmatrix} L_i \\ W_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_i^T & Z_i^T \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

avec  $L_i \in R^{n,q_i}$ ,  $W_i \in R^{n_y,q_i}$ ,  $R_i \in R^{n,q_i}$  et  $Z_i \in R^{n_u,q_i}$ . On peut dès lors écrire :

$$\delta_i P_i = \begin{bmatrix} L_i \\ W_i \end{bmatrix} [\delta_i I_{q_i}] \begin{bmatrix} R_i^T & Z_i^T \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

On en déduit que :

$$\sum_{i=1}^N P_i \delta_i = \begin{bmatrix} L_1 & \dots & L_N \\ W_1 & \dots & W_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 I_{q_1} & & \\ & \dots & \\ & & \delta_N I_{q_N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1^T & Z_1^T \\ \dots & \dots \\ R_N^T & Z_N^T \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

Se référant à l'équation ci-dessus, ainsi qu'aux équations (3.43) et (3.44), on obtient par identification :

$$\begin{aligned} B' &= [L_1 \dots L_N] \\ D_{12} &= [W_1 \dots W_N] \\ C' &= [R_1 \dots R_N]^T \\ D_{21} &= [Z_1 \dots Z_N]^T \\ D_{22} &= 0 \\ \Delta &= \text{diag}(\delta_i I_{q_i}) \end{aligned} \quad (3.48)$$

Dans une dernière étape, on se replace dans un formalisme entrée - sortie. L'équation (3.35) correspond à une matrice de transfert  $y = G(s, \delta)u$ , tandis que l'équation (3.38) correspond à la matrice de transfert augmentée :

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = H(s) \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} \quad (3.49)$$

Si l'on utilise le retour  $w = \Delta z$ , on obtient bien :

$$y = G(s, \delta)u = F_l(H(s), \Delta)u \quad (3.50)$$

## 3.6 Méthodes de calcul de la VSS mixte

De nombreux travaux ont porté sur le calcul de la VSS. Différents critères permettent de classer les algorithmes existants :

- *Nature de la perturbation structurée de modèle* : on peut distinguer deux grandes classes, selon que l'on considère une perturbation réelle de modèle ou une perturbation mixte<sup>6</sup>.
- *Nature du résultat* : on peut calculer soit la valeur exacte, soit une borne inférieure, soit une borne supérieure de la VSS
- *Volume de calcul* : on peut distinguer deux grandes classes de méthodes, selon que le volume de calcul est une fonction polynomiale ou exponentielle de la taille du problème (on parle alors d'algorithme à temps polynomial ou exponentiel). On peut cependant noter que le volume de calcul requis peut varier considérablement d'une méthode à l'autre à l'intérieur d'une même classe d'algorithmes. Rappelons d'autre part que tout algorithme qui calcule la valeur exacte de la VSS est nécessairement à temps exponentiel (voir paragraphe 3.3.3).

En conséquence, il y a un compromis à réaliser entre [7] :

- le degré de précision souhaité pour le calcul de la VSS (si on calcule des bornes inférieure et supérieure, ce degré de précision correspond à l'écart entre les deux bornes<sup>7</sup>)
- Le temps de calcul requis
- La dimension du problème

Dans le cas de problèmes de petite dimension, il est tout à fait envisageable d'utiliser des algorithmes à temps exponentiel. Par contre, on ne peut guère utiliser que quelques méthodes à temps polynomial pour les problèmes de grande dimension.

Nous nous concentrons ici sur les méthodes de calcul de la VSS complexe ou mixte, et plus précisément sur les méthodes classiques proposées par [2, 10, 15, 5]. Ces méthodes présentent l'intérêt d'être immédiatement disponibles dans la " $\mu$  Analysis and Synthesis Toolbox" de Matlab (voir également [13, 14] pour le calcul d'une borne supérieure de la VSS complexe ou mixte - ces méthodes sont disponibles dans la "Robust Control Toolbox").

---

6. pour des raisons historiques, on peut inclure le cas d'une perturbation complexe de modèle dans le cas plus général d'une perturbation mixte.

7. Si les algorithmes de calcul des bornes inférieure et supérieure sont à temps polynomial, on peut noter que l'on ne pourra pas garantir *a priori* l'écart entre les bornes (i.e. ce dernier problème est également NP complet).



### 3.6.1 Calcul d'une borne supérieure de la VSS

On considère le schéma d'interconnexion standard  $M(s) - \Delta(s)$  de la figure 1.12(a). Le théorème du petit gain fournit immédiatement une borne supérieure de la VSS à la fréquence  $\omega$  ( $M = M(j\omega)$ ) :

$$\mu(M) \leq \bar{\sigma}(M) \quad (3.51)$$

Le théorème du petit gain ne prend cependant pas en compte la structure de la perturbation  $\Delta(s)$ . On introduit donc un multiplicateur  $D(s)$  pour diminuer le conservatisme de la borne supérieure [13].

Ce multiplicateur  $D(s)$  doit avoir la propriété de commuter avec la perturbation  $\Delta(s)$  de modèle, i.e. :

$$D^{-1}(s)\Delta(s)D(s) = \Delta(s) \quad (3.52)$$

On peut dès lors introduire ce multiplicateur dans la boucle fermée  $M(s) - \Delta(s)$  sans modifier les propriétés de stabilité (voir figure 3.12(b)).

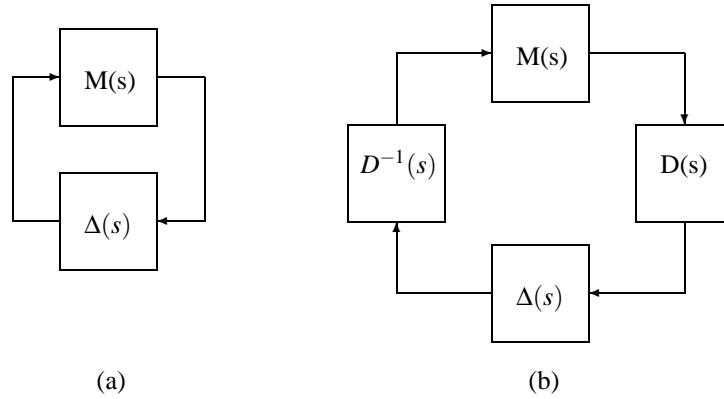


FIG. 3.12 – schéma d'interconnexion standard et petit gain.

On se place à la fréquence  $\omega$  et on note  $D = D(j\omega)$  et  $M = M(j\omega)$ . La structure de la perturbation  $\Delta$  de modèle est décrite par l'équation (voir page 93) :

$$\Delta = \text{diag}(\delta_1 I_{k_1}, \dots, \delta_{m_r} I_{k_{m_r}}, \Delta_1^C, \dots, \Delta_{m_C}^C) \quad (3.53)$$

Cette perturbation contient donc  $m_r$  scalaires réels  $\delta_i$  (éventuellement répétés si  $k_i > 1$ ) et  $m_C$  blocs complexes pleins  $\Delta_j^C$  (de dimension  $k_j^C$ ).

Pour vérifier l'équation (3.52), le multiplicateur  $D$  peut appartenir à l'ensemble suivant :

$$\mathcal{D} = \{D = \text{diag}(D_1, \dots, D_{m_r}, d_1 I_{k_1^C}, \dots, d_{m_C} I_{k_{m_C}^C}) \\ \text{avec } D_i = D_i^H > 0, D_i \in \mathbb{C}^{k_i, k_i} \text{ et } d_j > 0\} \quad (3.54)$$

La nouvelle borne supérieure de  $\mu$  s'écrit :

$$\mu(M) \leq \inf_{D \in \mathcal{D}} \overline{\sigma}(DMD^{-1}) \quad (3.55)$$

Il s'agit donc de minimiser le conservatisme de cette borne supérieure par un choix optimal du multiplicateur  $D$ . Le problème d'optimisation associé est convexe et non différentiable, et il existe de fait de nombreuses méthodes pour le résoudre de façon optimale ou sous-optimale (voir [2, 13, 9] et les références incluses).

**Remarque :** cette borne supérieure peut encore s'écrire<sup>8</sup> :

$$\inf_{D \in \mathcal{D}} \overline{\sigma}(DMD^{-1}) = \inf_{D \in \mathcal{D}} \sqrt{\overline{\lambda}(M^*DM, D)} \quad (3.56)$$

de sorte que le problème se ramène à un problème de type LMI (Linear Matrix Inequality), avec minimisation d'une valeur propre généralisée.

Cette borne supérieure s'avère très généralement peu conservatrice dans le cas d'une perturbation complexe de modèle ne contenant que des blocs complexes pleins. Dans le cas d'une perturbation mixte de modèle, le problème réside dans le fait que l'on n'a pas pris en compte le caractère réel des incertitudes paramétriques  $\delta_i$ . On a fait en effet implicitement l'hypothèse d'incertitudes paramétriques  $\delta_i$  complexes, de sorte que la borne supérieure de  $\mu$  correspondant à l'équation (3.55) peut s'avérer très restrictive dans le cas d'une perturbation mixte de modèle.

L'idée consiste à rajouter un multiplicateur  $G$  qui prend en compte le caractère réel des scalaires  $\delta_i$ . Ce multiplicateur  $G$  appartient à l'ensemble  $\mathcal{G}$  suivant :

$$\mathcal{G} = \{G = \text{diag}(G_1, \dots, G_{m_r}, 0_{k_1^c}, \dots, 0_{k_{m_c}^c}) \text{ avec } G_i = G_i^H \in C^{k_i, k_i}\} \quad (3.57)$$

La nouvelle borne supérieure de  $\mu$  s'écrit alors :

$$\mu(M) \leq \sqrt{\max(0, \inf_{\substack{D \in \mathcal{D} \\ G \in \mathcal{G}}} \overline{\lambda}(M^*DM + j(GM - M^*G), D))} \quad (3.58)$$

On notera que l'on retrouve la borne supérieure du  $\mu$  complexe (voir équation 3.55) en posant  $G = 0$ . D'autre part, le problème d'optimisation associé à cette nouvelle borne supérieure est quasi-convexe et non différentiable. Il peut être résolu, soit à l'aide d'un algorithme général de résolution de LMI (problème de minimisation d'une valeur propre généralisée), soit en utilisant les propriétés spécifiques du problème [19].

8. plus précisément, on a  $\overline{\sigma}(DMD^{-1}) = \sqrt{\overline{\lambda}(M^*D^2M, D^2)}$ , sachant que  $D \in \mathcal{D} \iff D^2 \in \mathcal{D}$ .

**Exemple:** Revenons à l'exemple du système (3.4), dans lequel nous prendrons les valeurs numériques

$$\frac{k_0}{m_0} = 1, \quad \frac{f_0}{m_0} = 1.$$

Notre objectif est d'évaluer les marges paramétriques de ce système par rapport aux paramètres  $\delta_1$  et  $\delta_2$ . De part sa simplicité, il est facile de voir que ce système est stable dans le carré

$$(\delta_1, \delta_2) \in [-1, 1] \times [-1, 1].$$

Nous allons donc essayer de confirmer ce résultat par le calcul de la borne supérieure de  $\mu$  qui va donner une estimation le plus généralement pessimiste de la taille du carré recherché. Pour ce faire, on calcule la fonction de transfert de la partie nominale (3.5) en un certain nombre de fréquences et on calcule le pic de la courbe ainsi obtenue. Ce pic est alors précisément l'inverse de la marge paramétrique du système incertain. Dans cet exemple, on obtient la courbe de la figure 3.13.

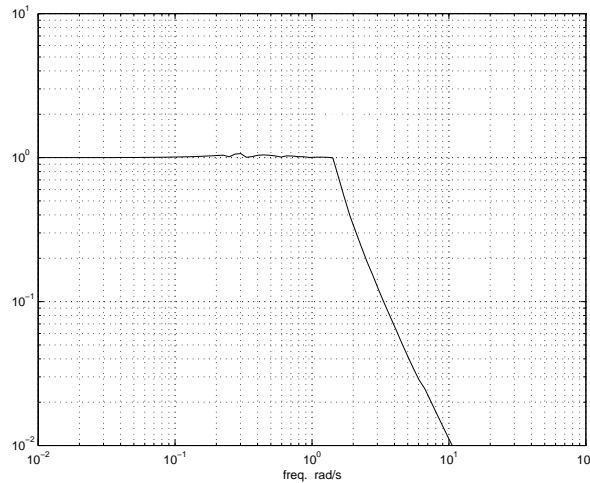


FIG. 3.13 – Courbe de la VSS

Comme le pic lu sur le graphique n'est autre que 1, on en déduit que la marge paramétrique du système est égale à  $1/1 = 1$ . Autrement dit, dans ce cas on obtient une valeur exacte pour les marges paramétriques du système.

### 3.6.2 Calcul d'une borne inférieure de la VSS

Nous avons vu dans le paragraphe précédent que le calcul d'une borne supérieure de la VSS conduit à un problème d'optimisation convexe ou quasi-convexe de type LMI. On peut par ailleurs noter que l'on n'a généralement pas égalité entre

la valeur exacte de  $\mu$  et sa borne supérieure (qu'il s'agisse d'une perturbation complexe ou mixte de modèle).

A contrario, nous allons voir que le calcul d'une borne inférieure conduit à un problème d'optimisation non convexe, et que le maximum global coïncide avec la valeur exacte de la VSS. Ceci dit, on ne pourra obtenir de façon générale qu'un maximum local, i.e. une borne inférieure de la VSS.

Nous introduisons dans la proposition suivante le problème d'optimisation non convexe associé au calcul d'une borne inférieure de la VSS.  $M$  représente une matrice complexe.

**Proposition 3.6.1**

$$\mu(M) = \max_{\Delta \in B\Delta} \rho_R(\Delta M) \quad (3.59)$$

**Démonstration :** on cherche une perturbation structurée de modèle  $\Delta$ , pour laquelle il existe un vecteur  $x$  vérifiant :

$$(I - \Delta M)x = 0 \quad (3.60)$$

$\Delta$  peut encore s'écrire :

$$\Delta = \frac{1}{\beta} \Delta^0 \text{ avec } \Delta^0 \in B\Delta \quad (3.61)$$

L'équation (3.60) s'écrit de façon équivalente :

$$\Delta^0 M x = \beta x \quad (3.62)$$

de sorte que  $\beta$  est une valeur propre de la matrice  $\Delta^0 M$ . Comme on cherche la perturbation déstabilisante de taille minimale, on cherche donc la valeur maximale de  $\beta$ , i.e. la valeur maximale du rayon spectral réel de la matrice  $\Delta^0 M$  pour  $\Delta^0 \in B\Delta$ .

▽

On introduit maintenant l'ensemble  $Q$  :

$$Q = \{\Delta / \delta_i^r \in [-1,1] \text{ et } \Delta_j^{C*} \Delta_j^C = I\} \quad (3.63)$$

**Proposition 3.6.2**

$$\mu(M) = \max_{Q \in Q} \rho_R(QM) \quad (3.64)$$

Si l'on compare les propositions 1 et 2, on constate qu'il suffit de chercher la perturbation déstabilisante sur la frontière de la boule unité dans le cas de perturbations complexes de modèle (i.e.  $\Delta_j^{C*} \Delta_j^C = I$ ). On ne peut par contre faire aucune hypothèse sur les perturbations réelles de modèle (i.e.  $\delta_i^r \in [-1,1]$ ).

La question est maintenant de savoir comment résoudre le problème d'optimisation, sachant que l'on ne pourra obtenir dans le cas général qu'un minimum local et que le temps de calcul mis en jeu doit être minimal. Une solution classique [10, 15] consiste à réécrire les conditions nécessaires d'optimalité associées au problème d'optimisation sous la forme  $f(x) = x$ , où  $f$  est une fonction vectorielle du vecteur  $x$ . On utilise ensuite une méthode heuristique de résolution de type point fixe, i.e. on cherche une limite  $x^*$  de la suite  $x_{k+1} = f(x_k)$ .

Si la suite converge,  $x^*$  vérifie les conditions nécessaires d'optimalité et l'on a donc obtenu un minimum local, i.e. une borne inférieure de la VSS. Il faut cependant noter que le résultat  $x^*$  dépend a priori de la valeur initiale  $x_0$  de la suite (du fait que le problème d'optimisation n'est pas convexe). D'autre part, la suite ne converge pas nécessairement vers une limite (on peut assez typiquement obtenir un cycle limite d'oscillation).

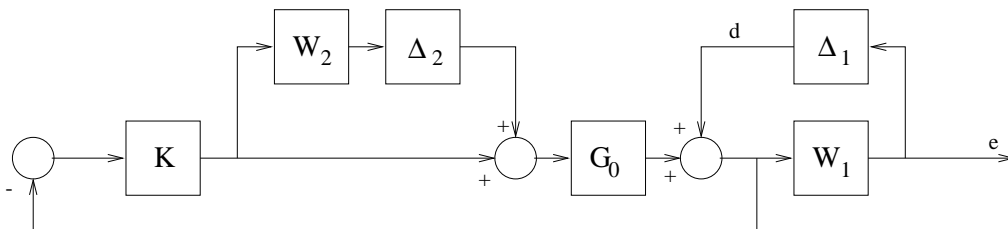
En pratique, l'algorithme présente généralement de bonnes propriétés de convergence et peut permettre d'obtenir avec un coût de calcul réduit une borne inférieure de la VSS de bonne qualité. Notons cependant que les propriétés de convergence de l'algorithme se dégradent considérablement dans le cas d'une perturbation purement réelle de modèle.

## 3.7 La $\mu$ -synthèse

La  $\mu$ -synthèse consiste en la construction explicite d'un compensateur  $K(s)$  minimisant la VSS du système. Il s'agit donc d'une technique de commande robuste qui s'appuie sur l'outil d'analyse que nous venons d'introduire. Comme nous l'avons indiqué, il est en général très difficile de calculer la valeur de  $\mu$ . Nous allons utiliser la borne supérieure développée dans la section précédente.

### 3.7.1 Exemple

Pour introduire la technique, nous considérons l'exemple suivant:



$G_0$  désigne le système nominal et  $K(s)$  le compensateur recherché.  $\Delta_2$  est une erreur de modèle en entrée et supposée normalisée ( $\|\Delta_2\|_\infty < 1$ ).  $W_2(s)$  désigne un

filtre de pondération définissant les caractéristiques fréquentielles de l'incertitude. De même,  $W_1(s)$  est un filtre de pondération sur le critère de performance défini par le transfert de  $d$  vers  $e$ . On peut associer à ce critère une incertitude fictive  $\Delta_1$  normalisée, c'est à dire  $\|\Delta_1\|_\infty < 1$ .

Notre objectif est de trouver un correcteur  $K(s)$  stabilisant tel que la norme  $H_\infty$  du transfert entre  $d$  et  $e$  soit inférieur à 1 pour tout  $\Delta_2$  de norme  $\|\Delta_2\|_\infty < 1$ . Il s'agit donc de réaliser une certaine robustesse en performance.

Comme nous l'avons vu, le système précédemment peut être réécrit sous une configuration équivalente de type  $M(s)$ - $\Delta$  comme sur la figure suivante.

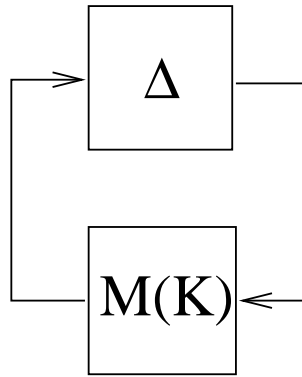


FIG. 3.14 – Mise sous forme standard pour l'analyse

Les différents transferts étant donnés par:

$$\begin{cases} M &= \begin{bmatrix} -W_2T & -W_2TG_0^{-1} \\ W_1SG_0 & W_1S \end{bmatrix} \\ T &= KG_0(I + KG_0)^{-1} \\ S &= (I + G_0K)^{-1} \\ \Delta &= \begin{bmatrix} \Delta_2 & 0 \\ 0 & \Delta_1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Ayant formulé le problème en ces termes, la technique de  $\mu$ -synthèse consiste à construire un compensateur assurant la stabilité robuste de la boucle fermée en présence de l'incertitude qui admet dans cet exemple la structure

$$\Delta = \begin{pmatrix} \Delta_1 & 0 \\ 0 & \Delta_2 \end{pmatrix}$$

L'application directe de la technique  $H_\infty$  en revanche serait très conservative car elle ne prendrait pas en compte la structure particulière de notre problème.

### 3.7.2 Problème général

La  $\mu$ -synthèse allie le concept de valeur singulière structurée et la technique  $H_\infty$  pour concevoir des compensateurs pour des systèmes à incertitudes structurées. Dans la suite, nous désignerons par  $K$  est le compensateur recherché,  $P$  la matrice de transfert d'interconnection qui décrit l'architecture de commande, et les relations entre les spécifications  $z$  et signaux  $e$  qui peuvent aussi être vus comme des signaux exogènes (références, perturbations, bruits) non bouclé, et les mesures  $y$  et les commandes  $u$ .  $\Delta$  désigne un bloc général d'incertitude dont certains sous-blocs peuvent être interprétés comme des performances.

La schéma générale du problème de  $\mu$ -synthèse est représenté sur la figure suivante:

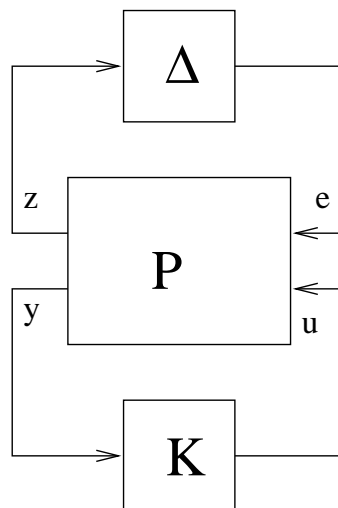


FIG. 3.15 – Interconnection pour la  $\mu$  synthèse

Cette forme standard est équivalente à celle représentée en 3.14 où :

$$M(K) = F_l(P, K) = P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21}$$

avec la notation

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}$$

On peut appliquer 2 types d'opération sur l'interconnection précédente.

- Pour un compensateur donné, on peut effectuer une  $\mu$  analyse pour évaluer les performances et la stabilité du compensateur. Cette opération doit donc prendre en compte la structure de  $\Delta$  qui caractérise notre problème.
- On peut également effectuer une synthèse  $H_\infty$  de manière à réduire l'impact des incertitudes  $\Delta$  sur le système. Dans ce cas, on minimisera le transfert entre  $e$  et  $z$  à l'aide d'un compensateur  $K(s)$ .

Lorsque les incertitudes ne sont pas structurées et consiste en un seul bloc plein  $\Delta$ , l'utilisation directe de la technique  $H_\infty$  pour construire le compensateur n'est pas restrictive et donne le meilleur résultat possible. Ceci car la valeur de  $\mu$  se confond dans ce cas avec la norme  $H_\infty$ . En revanche, lorsque les incertitudes sont structurées il faut modifier la technique de manière à exploiter la structure spécifique de  $\Delta$  et ainsi obtenir des compensateurs de meilleure qualité. Nous décrivons dans ce qui suit une voie possible pour affiner et améliorer des compensateurs issus de la synthèse  $H_\infty$ .

Comme la vraie valeur de  $\mu$  n'est en général pas calculable, nous allons exploiter la borne suivante:

$$\mu(F_l(P,K)) \leq \bar{\sigma}(DF_l(P,K)D^{-1}) \text{ avec } D \in \mathcal{D}$$

En d'autres termes, on cherche à minimiser sur l'ensemble des compensateurs stabilisants, la borne supérieure de  $\mu$  indiquée dans l'expression précédente. Ceci se traduit formellement par

$$\text{minimiser } \max_{\omega} \min_{D_\omega \in \mathcal{D}} \bar{\sigma}[D_\omega F_l(P,K)(j\omega)D_\omega^{-1}] \quad (3.65)$$

$D_\omega$  est choisi parmi les éléments de  $\mathcal{D}$ , indépendamment de  $D_{\omega'}$ , donc (3.65) est équivalent à :

$$\text{minimiser } \min_{D_\omega \in \mathcal{D}} \underbrace{\max_{\omega} \bar{\sigma}[D_\omega F_l(P,K)(j\omega)D_\omega^{-1}]}_{\|\cdot\|_\infty} \quad (3.66)$$

Si nous disposons d'une matrice de transfert  $\hat{D}(s)$  stable et à minimum de phase, telle que  $\hat{D}(s)$  coïncide avec chacun des  $D_\omega$  calculés aux pulsations aux pulsation  $j\omega$ , alors le problème de minimisation ci-dessus s'apparente à la minimisation de la norme  $H_\infty$  de

$$\hat{D}(s)F_l(P(s),K(s))\hat{D}(s)^{-1}$$

Ce dernier problème est précisément le problème de *mu* synthèse dans lequel on cherche à minimiser par rapport à  $K(s)$  et à  $\hat{D}(s)$  la norme suivante:

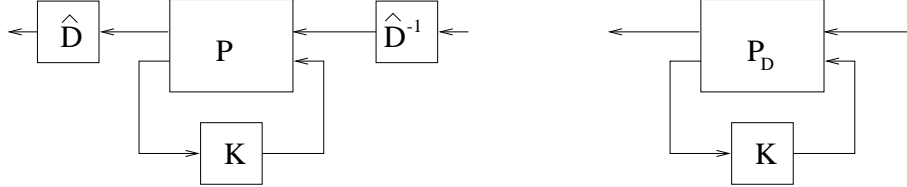
$$\|\hat{D}F_l(P,K)\hat{D}^{-1}\|_\infty \quad (3.67)$$

### 3.7.3 La $D - K$ itération

Une méthode de résolution pour minimiser  $\|\hat{D}F_l(P,K)\hat{D}^{-1}\|_\infty$  par rapport  $K$  et  $D$  est d'effectuer une minimisation alternative.  $D$  étant fixé, on optimise  $K$  et puis  $K$  étant fixé, on minimise vis-à-vis de  $D$  et ainsi de suite jusqu'à convergence. Notons en particulier les points suivants.



•  $\hat{D}(s)$  fixé, le problème se réduit à un simple problème  $H_\infty$ , comme sur la figure suivante.



où  $P_D$  est défini par

$$\begin{pmatrix} \hat{D} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} \hat{D}^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

Ce problème s'exprime donc sous la forme

$$\text{minimiser } \|\hat{D}F_l(P,K)\hat{D}^{-1}\|_\infty \text{ ou minimiser } \|F_l(P_D,K)\|_\infty, \quad (3.68)$$

et est donc résolu par les techniques décrites au chapitre 2.

• Pour  $K$  fixé, l'expression est minimisée à chaque fréquence par rapport à  $D$ . Ce problème se traduit par un problème convexe que l'on peut aisément résoudre par des techniques de programmation semi-définie. Lorsqu'une famille de matrices  $D_\omega$  a été déterminée sur un ensemble fini de fréquence, on procède alors à une interpolation de ces données par une matrice de transfert stable inversible et à inverse stable.

Les 2 étapes décrites précédemment constituent ce que l'on appelle les  $D - K$  itérations, faisant référence au fait que l'on minimise séparément en  $K$  puis en  $D$ .

Cette approche de la  $\mu$ -synthèse a été appliquée à de nombreux problèmes pratiques et a souvent donné satisfaction. Il faut noter cependant, que la procédure précédente ne garantit en rien l'optimalité de  $K$  et  $D$ . En effet, chaque étape de la  $D - K$  itération est parfaitement résolue car elle se caractérise par des propriétés de convexité. Malheureusement, il n'y a pas convexité jointe en les variables  $(D,K)$  et la solution obtenue ne peut être que locale.

Il est à noter, par ailleurs, cette procédure peut conduire à la synthèse d'un correcteur d'ordre élevé en termes de nombre d'état. En effet, la synthèse  $H_\infty$  donne un correcteur dont l'ordre est égal à celui du système  $P_D$ . Or, ce système est le système formé par la mise en cascade des scalings  $D(s)$  et  $D(s)^{-1}$  avec la matrice de transfert  $P(s)$ . On voit donc que l'ordre du correcteur dépend étroitement de l'ordre des scalings que l'on utilise dans l'interpolation.

### 3.7.4 La $D - G, K$ itération

L'approche précédente qui constitue la  $\mu$  synthèse classique s'appuie sur une procédure d'analyse correspondant à des incertitudes complexes. C'est à dire que les

scalings  $D$  ne prennent pas véritablement en compte le caractère réel de l'incertitude ce qui peut être très restrictif dans le cas d'incertitudes paramétriques. Il existe d'autres procédures de synthèse visant à prendre en compte plus précisément le cas d'incertitudes réelles ou paramétriques. C'est le cas de la technique des  $D - G, K$  itérations introduite par Young dans [11]. Cette procédure plus complexe exploite la VSS mixte et fait donc appel à une matrice de scaling additionnelle  $G$ . Comme pour la  $\mu$  synthèse classique, on remplace le calcul de  $\mu$  par une borne supérieure qui est ici la VSS mixte. Cette borne supérieure peut également s'écrire [12] :

$$\mu(M) \leq \inf_{D \in \mathcal{D}, G \in \mathcal{G}} \inf_{\beta \in \mathbb{R}, \beta > 0} \left\{ \beta / \bar{\sigma} \left( \left( \frac{DMD^{-1}}{\beta} - jG \right) (I + G^2)^{-1/2} \right) \leq 1 \right\}$$

Le calcul de cette borne supérieure pour une matrice  $M$  donnée se fait aisément par l'utilisation de la programmation semi-définie car ce problème est caractérisé par des propriétés de convexité. Le problème de la  $\mu$ -synthèse dans le cas d'incertitudes mixtes dynamiques et paramétriques se formule de manière analogue au cas classique sous la forme :

$$\text{minimiser } \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \inf_{D(\omega) \in \mathcal{D}, G(\omega) \in \mathcal{G}} \inf_{\beta \in \mathbb{R}, \beta > 0} \{ \beta(\omega) / \Gamma \leq 1 \}$$

où

$$\Gamma = \bar{\sigma} \left( \left( \frac{D(\omega)F_l(P,K)(j\omega)D^{-1}(\omega)}{\beta(\omega)} - jG(\omega) \right) (I + G^2(\omega))^{-1/2} \right)$$

Les différentes étapes de la procédure globale s'établissent comme suit. • Pour  $K(s)$  fixé, la détermination de  $D(\omega)$ ,  $G(\omega)$  et  $\beta(\omega)$  est un simple calcul d'analyse par la VSS mixte. Les matrices de scaling  $D(\omega)$ ,  $G(\omega)$  et  $\beta(\omega)$  sont calculées pour un certain nombre de fréquences, les fonctions de transfert  $D(s)$ ,  $G(s)$  et  $\beta(s)$  sont alors calculées par interpolation des données fréquentielles et doivent vérifier des conditions de stabilité.

• Pour  $D(s)$ ,  $G(s)$ ,  $\beta(s)$  fixés, le calcul de  $K(s)$  peut être résolu par utilisation de la synthèse  $H_\infty$ .

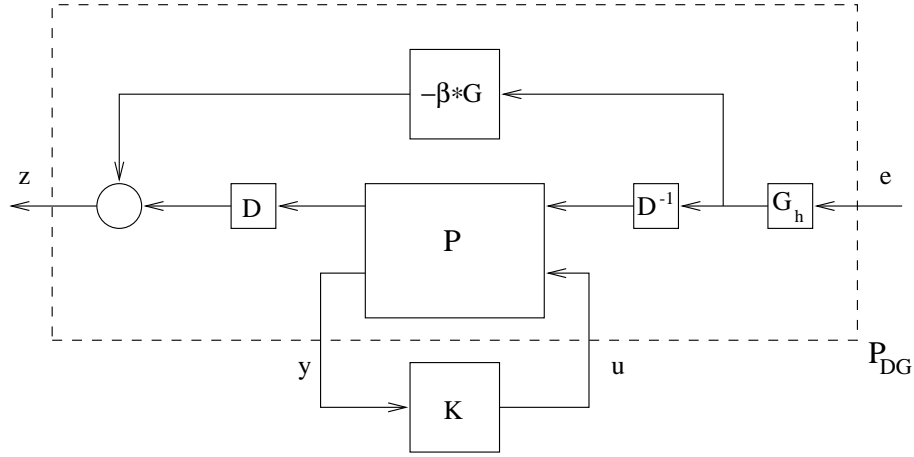
On en déduit la procédure de  $D - G, K$  itération décrite ci-dessous.

- Etape 1 : Trouver des estimations initiales des scalings  $D(\omega)$  et  $G(\omega)$  ainsi que le scalaire réel positif  $\beta$ . Une possibilité est de prendre pour les scalings  $D(\omega)$  la matrice identité à chaque fréquence. Si  $G(\omega)$  est choisie comme étant la matrice nulle à chaque fréquence,  $\beta_*$  doit satisfaire :

$$\bar{\sigma} \left( \left( \frac{D(\omega)F_l(P,K)(j\omega)D^{-1}(\omega)}{\beta_*} - jG(\omega) \right) (I + G^2(\omega))^{-1/2} \right) \leq 1$$

pour tout  $\omega$ , pour un compensateur stabilisant,  $K$ .

- Etape 2 : Faire une interpolation des matrices  $D(\omega)$  et  $jG(\omega)$  (obtenues à certaines fréquences), de façon à obtenir les matrices de transfert  $D(s)$  et  $G(s)$ . ( $D(j\omega)$  approximera  $D(\omega)$  et  $G(j\omega)$  approximera  $jG(\omega)$ ). Par des méthodes de factorisation spectrale, obtenir  $G_h$  telle que  $(I + G^*G)^{-1} = G_h G_h^*$  ( $G_h$  étant stable). Puis former le système  $P_{DG} = (DPD^{-1} - \beta_* G)G_h$ .
- Etape 3 : Faire une synthèse  $H_\infty$  pour trouver un compensateur  $K(s)$  qui minimise  $\|F_l(P_{DG}, K)\|_\infty$ . Le schéma de cette  $K$ -itération est donné par la figure suivante :



- Etape 4 : Calculer  $\beta_*$  défini par :

$$\beta_* = \sup_{\omega \in R} \inf_{\tilde{D}(\omega) \in \mathcal{D}, \tilde{G}(\omega) \in \mathcal{G}} \inf_{\beta(\omega) \in R, \beta(\omega) > 0} \{\beta(\omega) / \Gamma \leq 1\}$$

où

$$\Gamma = \bar{\sigma} \left( \left( \frac{\tilde{D}(\omega) F_l(P, K)(j\omega) \tilde{D}^{-1}(\omega)}{\beta(\omega)} - j\tilde{G}(\omega) \right) (I + \tilde{G}^2(\omega))^{-1/2} \right)$$

- Etape 5 : Trouver ensuite  $\hat{D}(\omega)$  et  $\hat{G}(\omega)$  en résolvant le problème de minimisation fréquence par fréquence :

$$\inf_{\hat{D}(\omega) \in \mathcal{D}_K, \hat{G}(\omega) \in \mathcal{G}_K} \bar{\sigma} \left( \left( \frac{\hat{D}(\omega) F_l(P, K)(j\omega) \hat{D}^{-1}(\omega)}{\beta(\omega)} - j\hat{G}(\omega) \right) (I + \hat{G}^2(\omega))^{-1/2} \right)$$

- Etape 6 : Comparer les nouvelles matrices de scalings  $\hat{D}(\omega)$  et  $\hat{G}(\omega)$  avec les précédentes estimées  $D(\omega)$  et  $G(\omega)$ . Arrêter le processus si elles sont proches ; sinon remplacer les matrices  $D(\omega)$  et  $G(\omega)$  par  $\hat{D}(\omega)$  et  $\hat{G}(\omega)$  respectivement et boucler sur l'étape 2 jusqu'à convergence.

Cette procédure proposée par Young est comme on le voit beaucoup plus complexe que la  $\mu$  synthèse classique et n'est pas sans poser des intéressants difficultés de nature algorithmique. Par ailleurs, comme la  $\mu$  synthèse classique, elle ne garantit aucune propriété de globalité quant à la solution obtenue. La définition d'algorithmes directs et robustes pour minimiser la VSS mixte est encore un sujet de recherche d'actualité.

### 3.7.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons introduit 2 techniques, une technique d'analyse et une technique de synthèse. La technique de  $\mu$  analyse que nous avons discutée donne des résultats très satisfaisants en pratique car elle peut être utilisée pour valider un compensateur arbitraire obtenu de manière indépendante. Elle permet donc de certifier les propriétés du système commandé en termes de stabilité et de performances.

La technique de  $\mu$  synthèse est, comme on l'a vu d'une utilisation plus délicate mais a déjà été utilisée dans de nombreuses applications pour lesquelles des résultats très satisfaisants ont été obtenus. D'une manière générale, on peut dire qu'elle s'avère très performante pour des systèmes de taille raisonnable ( $< 20$  états) pour lesquels les procédures de  $D - K$  itération ont encore une grande stabilité numérique. Des difficultés ont cependant été observées pour les systèmes de grande taille et pour les systèmes flexibles.

## Bibliographie

- [1] R.P. Braatz, P.M. Young, J.C. Doyle, and M. Morari. Computational complexity of  $\mu$  calculation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(5):1000–1002, 1994.
- [2] J. Doyle. Analysis of feedback systems with structured uncertainties. *IEE Proceedings, Part D*, 129(6):242–250, 1982.
- [3] J.C. Doyle. Structured uncertainty in control system design. In *Proceedings of the 24th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 260–265, Ft. Lauderdale, FL, USA, December 1985.
- [4] Doyle, J.C., K. Lenz, and A. Packard, “Design Example Using  $\mu$ -Synthesis: Space Shuttle Lateral Axis FCS during Reentry,” *Proc. CDC*, 1986, pp. 2218–2223.
- [5] M.K.H. Fan, A.L. Tits, and J.C. Doyle. Robustness in the presence of mixed parametric uncertainty and unmodeled dynamics. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36(1):25 – 38, 1991.
- [6] G. Balas, J.C. Doyle, K. Glover, A. Packard, and R. Smith.  $\mu$ -analysis and synthesis. *MUSYN, inc, and The Mathworks, Inc.*, 1991.
- [7] G. Ferreres, V. Fromion, G. Duc, and M. M’Saad. Application of real / mixed  $\mu$  computational techniques to a  $H_\infty$  missile autopilot. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 6(8):743–769, 1996.
- [8] B.G. Morton. New applications of  $\mu$  to real parameter variation problems. *Proceedings of the IEEE CDC*, pages 233–238, 1985.
- [9] A. Packard and J. Doyle. The complex structured singular value. *Automatica*, 29(1):71–109, 1993.
- [10] A. Packard, M.K.H. Fan, and J.C. Doyle. A power method for the structured singular value. *Proceedings of the IEEE CDC*, pages 2132–2137, 1988.
- [11] Young P.M. Controller design with mixed uncertainties. In *Proceedings of the 1994 American Control Conference*, volume 2, pages 2333–2337, juin 1994.
- [12] Young P.M., Newlin M.P., and Doyle J.C. Computing bounds for the mixed  $\mu$  problem. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 5(6):573–590, octobre 1995.

- 
- [13] M.G. Safonov. Stability margins of diagonally perturbed multivariable feedback systems. *IEE Proceedings, Part D*, 129(6):251–256, 1982.
- [14] M.G. Safonov and P.H. Lee. A multiplier method for computing real multivariable stability margins. *Proceedings of the IFAC World Congress*, pages 275–278, 1993.
- [15] P.M. Young and J.C. Doyle. Computation of  $\mu$  with real and complex uncertainties. *Proceedings of the IEEE CDC*, pages 1230–1235, 1990.
- [16] J.C. Doyle, A. Packard, and K. Zhou. Review of LFTs, LMIs and  $\mu$ . In *Proceedings of the 30th Conference on Decision and Control*, pages 1227–1232, Brighton, England, December 1991.
- [17] M.G. Safonov and R.Y. Chiang. Real/complex  $K_m$ -synthesis without curve fitting. *Control and Dynamic Systems*, ed. C. Leondes, 56(2):1–22, 1993.
- [18] J.H. Ly, M.G. Safonov, and R.Y. Chiang. Real/complex multivariable stability margin computation via generalized Popov multiplier - LMI approach. In *Proceedings of the American Control Conference*, pages 425–429, Baltimore, Maryland, June 1994.
- [19] P.M. Young, M.P. Newlin, and J.C. Doyle. Computing bounds for the mixed  $\mu$  problem. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 5(6):573–590, 1995.
- [20] E. Feron. Robustness of linear systems against parametric uncertainties : Towards consistent stability indicators. In *Proceedings of the 34th Conference on Decision and Control*, pages 1425–1430, New Orleans, LA, December 1995.
- [21] P. Gahinet, A. Nemirovskii, M. Chilali, and A.J. Laub. The LMI Control Toolbox : A Package for Manipulating and Solving LMI's, Mathworks Inc., Natick. .
- [22] P.M. Young. Controller design with real parametric uncertainty. *International Journal of Control*, 65(3):469–509, 1996.
- [23] C.-H. Huang, L. Turan, and M.G. Safonov. Conic sector synthesis : LMI approach. In *Proceedings AIAA Guidance, Navigation and Control Conference*, pages 1–6, San Diego, CA, July 1996.

# Annexe A

## Rappels d'Algèbre Linéaire

### A.1 Généralités

- $I_n$  : matrice identité de taille  $n$ .
- $A^T (A^H)$  : transposée (conjuguée hermitienne) d'une matrice  $A$ .
- Matrice symétrique: matrice  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  satisfaisant  $P = P^T$ .
- Matrice orthogonale (unitaire): matrice  $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$  satisfaisant  $U^T U = U U^T = I_n$  (resp.  $U^H U = U U^H = I_n$ ).
- Valeurs propres de  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  : racines de l'équation caractéristique  $\det(\lambda I - A) = 0$ . On notera  $\lambda_i(A)$  la  $i^{\text{ème}}$  valeur propre.
- Forme de Schur: toute matrice  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  peut se décomposer sous la forme

$$A = U^H T U$$

où  $U$  est unitaire et  $T$  est triangulaire supérieure. Les éléments diagonaux de  $T$  sont les valeurs propres de  $A$ .

- Valeurs singulières de  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  : racines carrées des valeurs propres de  $A^T A$  si  $m > n$ ,  $A A^T$  sinon. On les note  $\sigma_i(A)$  avec la convention  $\sigma_1(A) \geq \sigma_2(A) \geq \dots \geq 0$ . La plus grande et la plus petite valeur singulière sont notées  $\sigma_{\max}(A)$  et  $\sigma_{\min}(A)$ , respectivement.

Alors que les valeurs propres sont liées aux directions invariantes par la transformation linéaire associée à  $A$ , les valeurs singulières contiennent l'information "métrique" sur cette transformation. Plus précisément, la boule unité de  $\mathbb{R}^n$  est transformée en un ellipsoïde et les valeurs singulières correspondent aux demi-longueurs des axes principaux de cette ellipsoïde (grand axe et petit axe pour  $n = 2$ ). En particulier,

$$\sigma_{\max}(A) = \max_{u \neq 0} \frac{\|Au\|}{\|u\|}; \quad \sigma_{\min}(A) = \min_{u \neq 0} \frac{\|Au\|}{\|u\|}.$$

- Décomposition en valeurs singulières (SVD): toute matrice  $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$  ( $m \geq n$ ) peut s'écrire

$$A = U\Sigma V^T \quad (\text{A.1})$$

où  $U, V$  sont des matrices orthogonales de dimensions  $m \times m$  and  $n \times n$  respectivement, et  $\Sigma \in \mathbf{R}^{m \times n}$  est de la forme:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Les colonnes de  $U$  et  $V$  s'appellent les vecteurs singuliers gauches et droits, respectivement. Si  $u_i$  ( $v_i$ ) dénotent la  $i^{\text{ème}}$  colonne de  $U$  ( $V$ ) et  $\sigma_r$  dénote la plus petite valeur singulière non nulle, la décomposition (A.1) s'écrit aussi

$$A = \sum_{i=1}^r \sigma_i u_i v_i^T. \quad (\text{A.2})$$

On vérifie aisément que  $r = \text{rang}(A)$ , c'est-à-dire la dimension de  $\text{Im}A$ . De plus, une base orthonormée de  $\ker A$  est  $\{v_{r+1}, \dots, v_n\}$  et une base orthonormée de  $\text{Im}A$  est  $\{u_1, \dots, u_r\}$ .

- Pseudo-inverse de  $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$ : généralisation de la notion d'inverse pour les matrices singulières ou non carrées. Si  $A = U\Sigma V^T$  est une SVD de  $A$  avec

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_r > 0,$$

la pseudo-inverse  $A^+$  de  $A$  est obtenue comme

$$A^+ = V\Sigma^+ U^T \quad (\text{A.3})$$

où

$$\Sigma^+ = \begin{pmatrix} \text{diag}(1/\sigma_1, \dots, 1/\sigma_r) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

Cette matrice inverse la partie non singulière de  $A$  entre  $(\ker A)^\perp$  et  $\text{Im}A$ . La notion de pseudo-inverse est liée à la résolution "moindres carrés" des équations linéaires (voir sous-section suivante).

- quelques propriétés des valeurs singulières

- $\sigma_i(A) = \lambda_i(AA^*)^{1/2} = \lambda_i(A^*A)^{1/2}$

- $\sigma_{\max}(A) = \sigma_1(A) = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$

- $\sigma_{\min}(A^{-1}) = \frac{1}{\sigma_{\max}(A)}$



- $\sigma_{\max}(A^{-1}) = \frac{1}{\sigma_{\min}(A)}$
- $\sigma_{\min}(A) \leq |\lambda_i(A)| \leq \sigma_{\max}(A)$
- $\sigma_{\max}(\cdot)$  est une norme matricielle, on a donc toutes les propriétés de la norme avec également  $\sigma_{\max}(AB) \leq \sigma_{\max}(A)\sigma_{\max}(B)$ .
- $\text{rang}(A) =$  nombre de valeurs singulières non-nulles de  $A$ .
- $\sigma_{\max}(VAU) = \sigma_{\max}(A)$ ,  $\forall U, V$  unitaires
- Si  $A$  est symétrique,  $\sigma_i(A) = |\lambda_i(A)|$
- propriété de dilatation/contraction

$$\max\{\sigma_{\max}(A), \sigma_{\max}(B)\} \leq \left\| \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \right\| \leq \sqrt{2} \max\{\sigma_{\max}(A), \sigma_{\max}(B)\}$$

$$\max\{\sigma_{\max}(A), \sigma_{\max}(B)\} \leq \|(A \ B)\| \leq \sqrt{2} \max\{\sigma_{\max}(A), \sigma_{\max}(B)\}$$

$$\sigma_{\max}(A \ B) \leq \sigma_{\max}(A) + \sigma_{\max}(B)$$

- Le Théorème de Fan s'exprime sous la form

$$\sigma_i(A) - \sigma_{\max}(B) \leq \sigma_i(A+B) \leq \sigma_i(A) + \sigma_{\max}(B)$$

- A partir de Théorème de Fan, on obtient aisément

$$\sigma_{\min}(A) - 1 \leq \frac{1}{\sigma_{\max}(I+A)^{-1}} \leq \sigma_{\min}(A) + 1$$

- Propriété de singularité

$$\sigma_{\max}(E) < \sigma_{\min}(A) \Rightarrow \sigma_{\min}(A+E) > 0$$

Ce qui signifie que "l'effort" à fournir pour rendre la matrice  $A$  singulière est au moins de  $\sigma_{\min}(A)$ .

## A.2 Équations linéaires et matricielles

- Équation linéaire  $Ax = b$  où  $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$  et  $x, b \in \mathbf{R}^n$ .  
Cette équation est soluble si et seulement si  $b \in \text{Im}A$ . Si  $A$  est de plus inversible, elle admet une solution unique  $x = A^{-1}b$ .

- Résolution “moindres carrés” des équations linéaires: si l'équation  $Ax = b$  n'a pas de solution, on cherche généralement à résoudre au sens des moindres carrés, c'est-à-dire à résoudre

$$\min_{x \in \mathbf{R}^n} \|Ax - b\|$$

où  $\|x\| = \sqrt{x^T x} = (\sum x_i^2)^{1/2}$ . On montre que la solution de plus petite norme est donnée par

$$x^* = A^+ b. \quad (\text{A.5})$$

- Équations de Lyapunov: équations matricielles linéaires de la forme:

$$A^T X + XA + Q = 0$$

où  $A, X, Q \in \mathbf{R}^{n \times n}$  et  $Q = Q^T$  (symétrique). Cette équation est soluble dès que  $\lambda_i(A) + \bar{\lambda}_j(A) \neq 0$  pour tout  $(i, j) \in \{1, \dots, n\}$ .

Si  $A$  est stable, c'est-à-dire  $\text{Re } \lambda_i(A) < 0$ , la solution est

$$X = \int_0^\infty e^{\tau A^T} Q e^{\tau A} d\tau$$

qui est symétrique. De plus  $X \geq 0$  dès que  $Q \geq 0$ .

- Équations de Riccati.

Pierre angulaire des problèmes de contrôle avec coût quadratique, l'équation de Riccati standard est de la forme

$$A^T X + XA + XFX + G = 0 \quad (\text{A.6})$$

où  $F, G \in \mathbf{R}^{n \times n}$  sont symétriques,  $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ , et l'inconnue est une matrice  $X \in \mathbf{R}^{n \times n}$  que l'on souhaite symétrique. Sous réserve d'existence, il n'y a pas en général unicité de la solution  $X$ . Pour les applications à l'automatique, on s'intéresse à l'unique solution **stabilisante**, c'est-à-dire telle que les valeurs propres de  $A + FX$  soient toutes dans le demi-plan ouvert gauche.

La résolution de l'équation (A.6) fait intervenir le sous-espace propre stable de la matrice Hamiltonienne associée:

$$H = \begin{pmatrix} A & F \\ -G & -A^T \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{2n \times 2n}. \quad (\text{A.7})$$

Le spectre de cette matrice a la propriété d'être symétrique par rapport à l'axe imaginaire. Le sous-espace propre stable de  $H$  est le sous-espace des vecteurs propres associés aux valeurs propres stables. On le calcule par une décomposition de Schur de  $H$ . Si  $\begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$  est une base orthonormée de ce sous-espace, l'équation (A.6) a une solution stabilisante si et seulement si

- (i) le Hamiltonien  $H$  n'a pas de valeur propre sur l'axe imaginaire (alors  $P, Q \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ),

(ii) la matrice  $P$  est inversible.

Cette solution est alors symétrique et obtenue comme

$$X = QP^{-1}.$$

On peut s'en convaincre directement à partir de l'équation

$$H \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} T, \quad T \text{ stable} \quad (\text{A.8})$$

qui traduit que  $\begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$  est le sous-espace invariant stable de  $H$ . A noter que (A.8) donne  $A + FX = PTP^{-1}$  et cette matrice est donc bien stable. On notera aussi l'identité:

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ X & I \end{pmatrix}^{-1} H \begin{pmatrix} I & 0 \\ X & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + FX & F \\ 0 & -(A + FX) \end{pmatrix}.$$

Dans le contexte Linéaire Quadratique (LQG), on a  $F \leq 0$  et  $G \geq 0$ , autrement dit une équation de la forme

$$A^T X + XA - XBB^T X + C^T C = 0. \quad (\text{A.9})$$

On montre alors que la stabilisabilité de  $(A,B)$  et la détectabilité de  $(C,A)$  sont suffisantes pour garantir (i)-(ii) et donc l'existence d'une (unique) solution stabilisante. Cette solution est de plus semi-définie positive ( $X \geq 0$ ). A noter que ces résultats ne s'étendent pas au contexte  $H_\infty$  où  $F$  est indéfinie.

### A.3 Réduction équilibrée

Dans de nombreuses applications, on peut avoir besoin de déterminer un système réduit qui approxime au mieux le système ou le compensateur. Il existe différentes techniques pour effectuer cette approximation. Les techniques les plus courantes sont la *troncation* modale, la *réduction équilibrée* et l'*approximation de Hankel*. Ici, nous décrivons la réduction équilibrée qui donne satisfaction dans de nombreux cas pratiques.

La réduction équilibrée s'appuie sur le concept de réalisation équilibrée. Une réalisation équilibrée est une réalisation stable et minimale d'un système pour laquelle les grammians de commandabilité et d'observabilité sont diagonaux. En d'autres termes, étant donné une réalisation de  $G(s)$  sous la forme

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D,$$

on dit que  $(A,B,C,D)$  est équilibrée si les solutions des équations de Lyapunov

$$AP + PA^T + BB^T = 0, \quad A^T Q + QA + C^T C = 0, \quad (\text{A.10})$$

sont de la forme

$$P = Q = \Sigma = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Les matrices  $P$  et  $Q$  sont appelées les grammians de commandabilité et d'observabilité et peuvent encore être définies par

$$P = \int_0^\infty e^{At} BB^T e^{A^T t} dt, \quad q = \int_0^\infty e^{A^T t} C^T C e^{At} dt$$

Les grandeurs  $\sigma_i$  sont ordonnées sous la forme

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n > 0,$$

et sont appelées les valeurs singulières de Hankel de  $G(s)$ . De manière immédiate, elles vérifient

$$\sigma_i = \lambda_i(PQ), \quad i = 1, \dots, n.$$

La plus grande  $\sigma_1$  définit une norme sur l'ensemble des matrices de transfert stables et est appelée la norme de Hankel. On note souvent

$$\sigma_1 = \|G(s)\|_H.$$

Toute réalisation minimale d'un système peut être équilibrée par un simple changement de base et de nombreux algorithmes sont actuellement disponibles. L'intérêt de la représentation équilibrée est que l'on peut évaluer la plus ou moins grande commandabilité ou observabilité des états de la nouvelle base par simple lecture de la valeur singulière de Hankel associée. Par exemple,  $\sigma_1 \sigma_2$  signifie que  $x_1$  est plus commandable/observable que  $x_2$  et donc joue un rôle plus important dans la réalisation de  $G(s)$ . On pourra donc éventuellement négliger  $x_1$  devant  $x_2$  et effectuer une troncature de certains états. L'importance de chaque état en réduction équilibrée est appréciée par rapport à sa contribution au comportement entrée/sortie, alors qu'il n'en est pas de même dans d'autres techniques de réduction qui exploitent des informations internes comme les techniques modales. Retenons enfin que lorsqu'on dispose d'une représentation équilibrée, chaque état est tout autant commandable qu'observable et la mesure de cette commandabilité/observabilité *jointe* est la valeur singulière de Hankel correspondante ( $\sigma_i$ ). Enfin, on retiendra également que la réduction équilibrée comme la plupart des techniques de réduction ne s'applique pas directement aux systèmes instables. Pour ces derniers, on effectuera donc tout d'abord une séparation par décomposition modale par exemple des dynamiques stables et instables et l'on appliquera la réduction équilibrée à la dynamique stable seulement. Nous présentons ci-dessous une illustration de la technique.

### Exemple A.3.1

Le théorème suivant donne une estimation de l'erreur que l'on commet lorsque l'on effectue une réduction équilibrée d'un système.

**Théorème A.3.2** Soit  $G(s)$  une matrice de transfert stable ayant les valeurs singulières de Hankel

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \dots > \sigma_n$$

où les  $\sigma_i$  sont de multiplicité  $r_i$ . Soit  $G_k(s)$  une matrice de transfert obtenue par troncature de la réalisation équilibrée de  $G(s)$  aux  $r_1 + r_2 + \dots + r_k$  premiers états. Alors, on a la borne suivante:

$$\|G(s) - G_k(s)\|_\infty \leq 2(\sigma_{k+1} + \sigma_{k+2} + \dots + \sigma_n)$$

### A.3.1 Algorithme

On obtient aisément une représentation équilibrée du système  $G(s)$  en utilisant un algorithme qui se décompose en 4 étapes:

1. Résoudre les équations de Lyapunov (A.10).
2. Effectuer une factorisation de Cholesky  $Q = R^T R$ .
3. Calculer la décomposition en valeurs singulières

$$RPR^T = U\Sigma^2U^T$$

4. Former la réalisation équilibrée

$$(A_e, B_e, C_e, D_e) = (TAT^{-1}, TB, CT^{-1}, D)$$

où

$$T = \Sigma^{-1/2}U^T R.$$

### A.3.2 Exemple

On considère le système  $G(s)$  décrit par la fonction de transfert

$$G(s) = \frac{8(s+3)^8}{(s+3)^8 + 3^8}.$$

On vérifiera tout d'abord que ce système est bien stable. Le calcul de ses valeurs singulières de Hankel donne:

$$\lambda_i(PQ)^{1/2} = 2.3475 \quad 2.0772 \quad 0.4893 \quad 0.1045 \quad 0.0125 \quad 0.0011 \quad 0.0001 \quad 0.0000$$

Il apparaît que les 4 dernières valeurs singulières sont sensiblement plus petites que les 4 premières. On va donc effectuer une réduction à l'ordre 4. Ensuite, nous

allons essayer des réductions aux ordres 3 et 1. Les résultats sont présentés sur la figure A.1.

FIG. A.1 – Courbes de gain du système et systèmes réduits  
 -: nominal, ...: ordre 4, –: ordre 3, -.: ordre 1

Il apparaît qu'une réduction à l'ordre 4 ne modifie pratiquement le comportement entrée/sortie du système. Une réduction à l'ordre 3 est encore acceptable mais une réduction à l'ordre 1 introduit une grande distorsion dynamique. Suivant l'application considérée, on choisira donc une réduction à l'ordre 4 ou 3.

## A.4 Transformation Linéaire Fractionnaire (LFT)

Les LFT (en anglais Linear Fractional Transformations) sont des objets génériques qui apparaissent dans de nombreux problèmes de modélisation et de commande pour les systèmes dynamiques. En particulier,

- la formulation du problème  $H_\infty$  mais aussi du problème  $H_2$  se fait à travers la forme standard qui n'est autre qu'une expression de type LFT entre le système augmenté et le compensateur.
- les incertitudes dynamiques ou paramétriques apparaissent dans le schéma de commande à travers une expression LFT.
- l'universalité des LFT se justifie par le fait que toute expression rationnelle peut se réécrire en termes de LFT. De plus, la combinaison de ces objets donne à son tour naissance à des objets LFT.

Nous examinons dans cette section les propriétés principales des LFT qui sont susceptibles d'être utiles dans la pratique de la commande robuste et en modélisation.

### A.4.1 Définitions

La notation LFT se définit comme suit. Pour des matrices de dimensions appropriées  $K$  et  $M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}$  et en supposant que les inverses existent, les LFT inférieures  $F_l(.,.)$  et supérieures  $F_u(.,.)$  sont définies par:

$$F_u(M, K) = M_{22} + M_{21}K(I - M_{11}K)^{-1}M_{12}. \quad (\text{A.11})$$

et

$$F_l(M, K) = M_{11} + M_{12}K(I - M_{22}K)^{-1}M_{21}. \quad (\text{A.12})$$

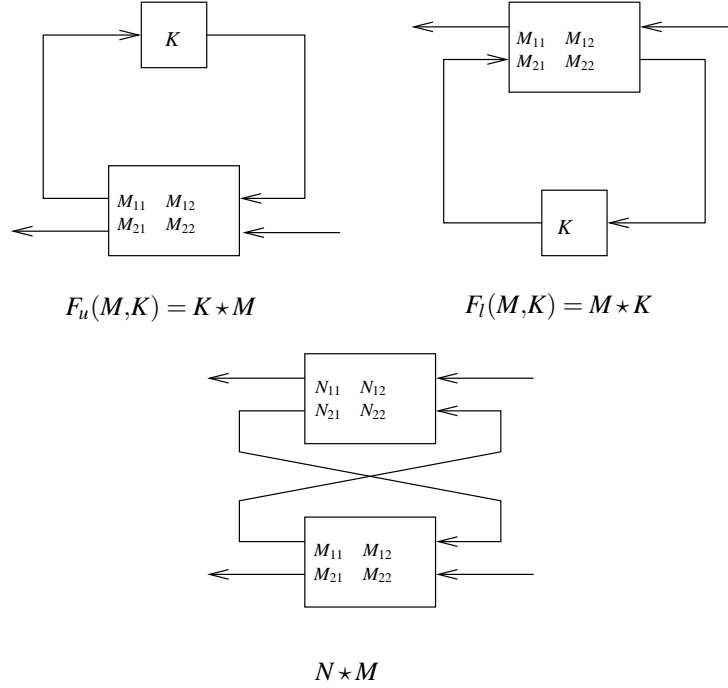


FIG. A.2 – LFT supérieures et inférieures  
et produit de Redheffer

Notons que ces expressions sont obtenues par calcul direct du transfert résiduel après rebouclage du bloc  $K$  comme indiqué sur la figure A.2.

On peut effectuer sur les expressions LFT des opérations algébriques dont les plus intéressantes sont rappelées ci-dessous.

## A.4.2 Propriétés

- Le produit de Redheffer ou produit  $\star$ .

Pour des matrices de dimensions appropriées,

$$N = \begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{pmatrix} \text{ et } M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix},$$

et en supposant l'existence des inverses, on définit le produit de Redheffer  $N \star M$  par

$$N \star M := \begin{pmatrix} F_l(N, M_{11}) & N_{12}(I - M_{11}N_{22})^{-1}M_{12} \\ M_{21}(I - N_{22}M_{11})^{-1}N_{21} & F_u(M, N_{22}) \end{pmatrix}, \quad (\text{A.13})$$

Ce produit (voir figure A.2) peut être naturellement étendu aux cas de matrices  $N$  ou  $M$  n'ayant qu'un seul bloc en adoptant les conventions

$$N \star M_{11} := F_l(N, M_{11}); \quad N_{22} \star M := F_u(M, N_{22}).$$

On vérifie alors aisément que le produit de Redheffer est associatif, c'est à dire

$$(L \star M) \star N = L \star (M \star N) = L \star M \star N$$

### • Composition de LFT

Une propriété importante est que toute interconnection de LFT est encore une LFT. Par exemple, pour

$$R = F_l(Q, K') \quad \text{où} \quad K' = F_l(M, K)$$

on peut écrire  $R$  comme une LFT faisant intervenir  $K$  sous la forme

$$R = F_l(P, K)$$

avec

$$P = \begin{pmatrix} Q_{11} + Q_{12}M_{11}(I - Q_{22}M_{11})^{-1}Q_{21} & Q_{12}(I - M_{11}Q_{22})^{-1}M_{12} \\ M_{21}(I - Q_{22}M_{11})^{-1}Q_{21} & M_{22} + M_{21}Q_{22}(I - M_{11}Q_{22})^{-1}M_{12} \end{pmatrix}.$$

Des expressions similaires peuvent naturellement être obtenues avec des LFT supérieures  $F_u(\dots)$ .

### • LFT inférieure et supérieure

Supposons que  $R = F_l(M, K)$ , alors on peut réécrire  $R$  comme une LFT supérieure en  $M$  et  $K$  sous la forme:

$$R = F_u\left(\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, K\right)$$

### • Inverse de LFT

En supposant que les inverses ci-dessous sont tous bien définis, on peut écrire

$$(F_l(M, K))^{-1} = F_l(\tilde{M}, K),$$

où  $\tilde{M}$  est donné par:

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} M_{11}^{-1} & -M_{11}^{-1}M_{12} \\ M_{21}M_{11}^{-1} & M_{22} - M_{21}M_{11}^{-1}M_{12} \end{pmatrix}.$$

### • Inverse du paramètre $K$

Etant donné une LFT en  $K$ , on peut l'exprimer en une LFT en  $K^{-1}$  à conditions que les inverses impliquées existent.

$$F_l(M, K) = F_l(\tilde{M}, K^{-1}),$$



où  $\tilde{M}$  est donné par

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} M_{11} - M_{12}M_{22}^{-1}M_{21} & -M_{12}M_{22}^{-1} \\ M_{22}^{-1}M_{21} & M_{22}^{-1} \end{pmatrix}$$

Ceci découle du fait que

$$(I + L)^{-1} = I - L(I + L)^{-1}, \quad \forall L \text{ carrée.}$$

### A.4.3 Exemple de réalisation LFT

Dans cet exemple, on considère les systèmes du second-ordre généralisés décrits par l'équation différentielle:

$$M\ddot{q} + D\dot{q} + Kq = Gu. \quad (\text{A.14})$$

On sait que ce type de représentation caractérise le comportement dynamique d'un système mécanique linéaire. Notre but est d'obtenir une forme LFT de ce système lorsque la matrice d'inertie  $M$  est soumise à des incertitudes  $\Delta$ . On veut donc isoler  $\Delta$  sous la forme  $F_l(X, \Delta)$ , où  $X$  est une matrice à déterminer.

Un représentant équivalent de (A.14) s'écrit sous la forme

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -K & -D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ G \end{pmatrix} u,$$

soit encore

$$E\dot{x} = Ax + Bu,$$

en définissant le vecteur d'état

$$x = \begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \end{pmatrix}.$$

En présence d'incertitude sur la matrice d'inertie, l'équation précédente devient

$$(E + \Delta_E)\dot{x} = Ax + Bu,$$

avec

$$\Delta_E = \Gamma\Delta W, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} 0 & I \end{pmatrix}$$

On peut donc écrire

$$\dot{x} = (E + \Gamma\Delta W)^{-1}Ax + (E + \Gamma\Delta W)^{-1}Bu \quad (\text{A.15})$$

Sous cet forme, le système n'est pas encore une expression LFT, mais en utilisant le Lemme d'inversion matricielle

$$(V + LR)^{-1} = V^{-1} - V^{-1}L(I + RV^{-1}L)^{-1}RV^{-1},$$

on obtient

$$(E + \Gamma\Delta W)^{-1} = E^{-1} - E^{-1}\Gamma\Delta(I + WE^{-1}\Gamma\Delta)^{-1}WE^{-1}$$

Ainsi, on peut écrire l'équation (A.15) sous la forme équivalente

$$\dot{x} = E^{-1}Ax + E^{-1}Bu - E^{-1}\Gamma\Delta(I + WE^{-1}\Gamma\Delta)^{-1}WE^{-1}(Ax + Bu)$$

qui est encore équivalente à la forme LFT

$$\begin{aligned} \dot{x} &= E^{-1}Ax + E^{-1}Bu - E^{-1}\Gamma w \\ z &= WE^{-1}Ax + WE^{-1}Bu - WE^{-1}\Gamma w \\ w &= \Delta z. \end{aligned} \tag{A.16}$$

Le rebouclage par le bloc  $\Delta$ , maintenant isolé, est caractéristique de la LFT recherchée.

Une autre manière de procéder consiste à exprimer le terme  $E + \Gamma\Delta W$  sous la forme LFT

$$E + \Gamma\Delta W = F_l\left(\begin{pmatrix} E & \Gamma \\ W & 0 \end{pmatrix}, \Delta\right),$$

puis à inverser ce terme en utilisant les propriétés des LFT décrites précédemment. On aboutit alors directement au résultat (A.16).