

Détermination de matrice semblable Metzler par optimisation non lisse

Emmanuel Chambon¹, Laurent Burlion¹ et Pierre Apkarian¹

(*Journal Européen des Systèmes Automatisés*)

Révision 1

Soumis le XX/XX/2016, accepté le XX/XX/2016, publié le XX/XX/2016.

Version auteur modifiée le 24 mars 2016.

Résumé : *La conception d'observateurs par intervalles requiert la coopérativité du système dynamique considéré. La littérature propose un certain nombre de méthodes pour concevoir des observateurs par intervalles sur des systèmes coopératifs et non coopératifs. Dans le deuxième cas, un changement de coordonnées est utilisé afin d'obtenir une dynamique coopérative dans la nouvelle base. Dans cet article, une nouvelle méthode permettant la détermination numérique de cette transformation est introduite. Elle repose sur une reformulation du problème mathématique de détermination d'une matrice de transformation en un problème de stabilisation d'un ensemble de modèles dynamiques linéaires. Le problème équivalent est alors résolu en faisant appel à une technique d'optimisation non lisse. L'approche est testée sur deux exemples extraits de la littérature.*

Mots-clés : *Observateurs par intervalles, optimisation non lisse, synthèse multi-modèles*

1 Introduction

Les observateurs par intervalles permettent d'encadrer à tous instants de manière déterministe l'état d'un système stable éventuellement soumis à des perturbations inconnues mais à bornes connues. Par exemple, étant donnée une perturbation inconnue $\underline{d}(t) \leq d(t) \leq \bar{d}(t)$ où $\underline{d}(t)$ et $\bar{d}(t)$ sont deux bornes connues de $d(t)$, un observateur par intervalles fournit deux états $\underline{x}(t)$ et $\bar{x}(t)$ tels que $\underline{x}(t) \leq x(t) \leq \bar{x}(t)$, $\forall t \geq 0$. Le cœur de la méthode de conception des observateurs par intervalles repose sur la notion de coopérativité des systèmes. En effet, les systèmes coopératifs présentent la propriété intéressante de conserver l'ordre partiel entre leurs trajectoires [1], [2].

Les observateurs par intervalles pour des systèmes coopératifs stables ont notamment été étudiés dans [3]. Dans ce cas, une copie du système – elle-même coopérative et stable – suffit pour construire l'observateur. Cependant, peu de systèmes physiques réels sont coopératifs. Une solution est de déterminer et d'utiliser une base dans laquelle le système considéré est coopératif. Suite aux travaux présentés dans [4], un changement de coordonnées dépendant du temps a été proposé dans [5] pour des systèmes *LTI* stables non coopératifs. Ces travaux restent complexes à mettre en œuvre à cause de la dépendance de la structure de Jordan au nombre de valeurs propres complexes. Les algorithmes permettant de la déterminer sont également numériquement instables dans le cas général.

Dans le cas des systèmes instables, l'application directe des méthodes dédiées aux systèmes stables entraîne sans surprise la divergence de $\|\bar{x}(t) - \underline{x}(t)\|$. Ceci viole la définition d'un observateur par intervalles telle que rappelée dans [6]. Les travaux [3], [5] ou encore [7] proposent de stabiliser la dynamique au moyen du gain d'observation L d'un observateur classique. C'est alors la dynamique de l'erreur d'observation qui est rendue coopérative et sur laquelle un observateur par intervalles est conçu. Cette approche permet de considérer des cas plus généraux et a été utilisée dans l'ensemble des travaux qui ont succédé. Nous l'adoptons également ici.

¹Département de Commande des Systèmes et Dynamique du Vol – Onera, Centre de Toulouse, 2 Avenue Édouard Belin, 31000 Toulouse, France, emmanuel.chambon@onera.fr

L'approche par changement de coordonnées invariant a été introduite dans des travaux plus récents comme [7], [8] ou [9]. Pour garantir la coopérativité de la dynamique de l'erreur d'observation, il faut s'assurer de l'existence de deux matrices (P, L) telles que la matrice $M = P(A - LC)P^{-1}$ est Metzler où A est la matrice d'état du système considéré et C est la matrice d'observation du système. Dans [7], une approche basée sur la résolution d'une équation de Sylvester est proposée qui nécessite la définition préalable d'une matrice M désirée, ce qui peut réduire l'ensemble des solutions acceptables.

Dans cet article, nous nous plaçons dans le cas d'un changement de coordonnées à temps invariant. Nous proposons alors une alternative aux techniques évoquées de détermination d'une matrice Metzler semblable à la matrice $A - LC$. En utilisant des outils d'optimisation non lisse, nous procédons au calcul simultané des matrices P et L et obtenons ainsi la matrice Metzler $M = P(A - LC)P^{-1}$ *a posteriori*. Des contraintes de contrôle additionnelles (e.g. réjection de perturbation) peuvent également être formalisées dans cette approche.

Les techniques d'optimisation non lisse utilisées dans cet article ont été conçues dans le cadre de la synthèse de commande structurée sous contraintes qui est un problème non lisse non convexe [10], [11]. Des développements plus récents de ces approches [12] permettent également la synthèse de contrôleur sous contraintes multiples faisant référence à des modèles distincts. Les contraintes à vérifier peuvent par exemple porter sur le lieu des pôles en boucle fermée ou sur le rejet d'une perturbation donnée. Dans notre approche, de telles contraintes seront utilisées pour améliorer la qualité d'estimation par l'intermédiaire du gain d'observation L . Nous allons également montrer que le problème de trouver (P, L) telles que $P(A - LC)P^{-1}$ est Metzler peut se reformuler comme un problème de stabilisation d'un ensemble de systèmes autonomes. Par optimisation non lisse, nous proposons alors une solution numérique à ce problème.

L'organisation de cet article est la suivante. Après avoir détaillé les notations et définitions utilisées dans la Section 2, le formalisme des observateurs par intervalles est introduit dans la Section 3. Au vu des hypothèses faites dans cette section, nous formulons le problème complet de la détermination d'une matrice Metzler avec contraintes de contrôle additionnelles dans la Section 4. En utilisant une méthode d'optimisation non lisse permettant de résoudre le problème de synthèse équivalent, une solution numérique est proposée dans la Section 5. Cette approche est appliquée à deux exemples de la littérature dans la Section 6 avant de conclure à la Section 7.

2 Définitions et notations

La variable de Laplace est notée s et $T_{w \rightarrow z}(s)$ désigne la fonction de transfert entre l'entrée w et la sortie z . Étant donnés deux entiers i et j , le symbole de Kronecker est noté δ_{ij} . Sauf mention contraire, i et j désignent des entiers vérifiant $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq m$ où (n, m) sont les dimensions d'une matrice. La matrice identité est notée $I_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Soit le vecteur $x(t) \in \mathbb{R}^n$, si de telles bornes sont connues, $\underline{x}(t)$ désigne une borne inférieure de $x(t)$ et $\bar{x}(t)$ une borne supérieure :

$$\underline{x}(t) \leq x(t) \leq \bar{x}(t), \forall t \geq 0 \quad (1)$$

Soit la matrice $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$, la matrice de $\mathbb{R}^{n \times m}$ ayant pour coefficients $[\max(a_{ij}, 0)]_{ij}$ est notée $A^+ = \max(A, 0)$ et $A^- = A^+ - A$. Nous introduisons la définition d'une matrice Metzler :

Définition 1. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$. La matrice A est dite Metzler si et seulement si

$$\forall i \neq j, a_{ij} \geq 0 \quad (2)$$

Dans la majorité des cas, les matrices que nous considérons ne sont pas Metzler. S'il est souhaitable de vérifier cette condition, un changement de base est considéré :

Définition 2. Étant données deux matrices $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$, le couple de matrices $(P \in \mathbb{R}^{n \times n}, L \in \mathbb{R}^{n \times m})$ tel que la matrice $P(A - LC)P^{-1}$ est Metzler est appelé "matrices de transformation en matrice Metzler".

La matrice L est en fait le gain d'un observateur classique. Afin de pouvoir régler cet observateur, il faut s'assurer de la détectabilité du système :

Hypothèse 1. Soit un système (G) de représentation d'état (A, B, C, D) . Dans cet article, le couple (A, C) est supposé être détectable.

Cette hypothèse signifie que les modes inobservables de A sont stables ce qui permet de déterminer un gain L tel que $A - LC$ est Hurwitz. La conception d'observateurs par intervalles repose également sur le Lemme suivant, explicité dans [13] et dont l'utilité sera soulignée dans la Section 3 :

Lemme 1. Soit $x(t) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\forall t, \underline{x}(t) \leq x(t) \leq \bar{x}(t)$ et $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ telle que $A = A^+ - A^-$. Alors, $\forall t$:

$$A^+ \underline{x}(t) - A^- \bar{x}(t) \leq Ax(t) \leq A^+ \bar{x}(t) - A^- \underline{x}(t) \quad (3)$$

Preuve 1. Voir [13, Lemma 1] pour la preuve.

La théorie des observateurs par intervalles repose sur la notion de système coopératif qui a notamment été étudiée par [1]. Nous rappelons maintenant cette définition ainsi qu'une propriété qui lui est associée.

Définition 3. Un système linéaire continu est dit coopératif si sa matrice d'état A est une matrice Metzler et si B, C et D sont des matrices non-négatives.

Remarque 1. Dans le cas continu, un système linéaire coopératif est un système positif.

Les systèmes coopératifs vérifient la propriété suivante qui sera utilisée dans le développement des observateurs par intervalles :

Propriété 1. Soit (G) un système linéaire continu coopératif d'état x . Soient deux conditions initiales ordonnées $\underline{x}_0 \leq \bar{x}_0$ et deux entrées de commande ordonnées $\underline{u}(t) \leq \bar{u}(t), \forall t$. Soit $\underline{x}(t)$ (resp. $\bar{x}(t)$) l'état du système (G) initialisé avec \underline{x}_0 (resp. \bar{x}_0) et commandé par $\underline{u}(t)$ (resp. $\bar{u}(t)$). Alors

$$\underline{x}(t) \leq \bar{x}(t), \forall t \quad (4)$$

3 Observateurs par intervalles

Dans cette partie, nous développons le formalisme des observateurs par intervalles qui permet d'encadrer de manière déterministe l'état d'un système à partir des mesures et d'un observateur classique. Ceci nous amènera à considérer les raisons qui motivent le développement d'une méthode de synthèse de matrices de transformation d'une matrice d'état en matrice Metzler. Nous nous inspirons du formalisme présenté dans [7] et, dans une moindre mesure, dans [5] et [9].

3.1 Système considéré

Dans cet article, nous considérons un système LTI connu dont la représentation d'état est donnée par

$$(G) \begin{cases} \dot{x} &= Ax + B_u u + B_d d \\ y &= Cx + D_u u + D_d d \end{cases} \quad (5)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, $u \in \mathbb{R}^{n_u}$ est l'entrée de commande et $d \in \mathbb{R}^{n_d}$ est une entrée inconnue perturbant l'état et/ou les mesures. Notons que la matrice de commande B (resp. d'observation D) est volontairement décomposée selon l'entrée considérée en $B_u \in \mathbb{R}^{n \times n_u}$ et $B_d \in \mathbb{R}^{n \times n_d}$ (resp. $D_u \in \mathbb{R}^{m \times n_u}$ et $D_d \in \mathbb{R}^{m \times n_d}$). La condition initiale est notée x_0 et est inconnue. Aucune hypothèse n'est faite sur les pôles de la matrice d'état A . L'hypothèse suivante est considérée :

Hypothèse 2. Nous connaissons $(\underline{x}_0, \bar{x}_0)$ et $(\underline{d}(t), \bar{d}(t))$, $\forall t$ tels que :

$$\underline{x}_0 \leq x_0 \leq \bar{x}_0 \quad (6)$$

$$\forall t, \underline{d}(t) \leq d(t) \leq \bar{d}(t) \quad (7)$$

En vertu de l'Hyp. 2, il est intéressant d'utiliser un observateur par intervalles si nous souhaitons obtenir plus d'informations sur l'état de notre système, à chaque instant. Concevoir un tel type d'observateur consiste à construire deux systèmes de vecteurs d'états respectifs $\underline{x}(t)$ et $\bar{x}(t)$ tels que

$$\underline{x}(t) \leq x(t) \leq \bar{x}(t), \forall t \quad (8)$$

Nous allons voir que la possibilité de construire ces deux systèmes est conditionnée à la vérification d'une hypothèse de coopérativité.

3.2 Observateur classique et erreur d'observation

Comme mentionné en introduction, nous ne nous interdisons pas de considérer des systèmes instables. Comme un observateur par intervalles ne peut être construit à partir d'une dynamique instable, l'approche habituelle [7] est de le construire à partir de la dynamique d'un observateur classique. Sous l'Hyp. 1, cette dynamique est rendue stable au moyen du gain d'observation L . Considérons l'observateur classique de Luenberger suivant :

$$(G_{\text{obs}}) \begin{cases} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + B_u u + L(y - \hat{y}) \\ \hat{y} &= C\hat{x} + D_u u \\ \hat{x}(0) &= \hat{x}_0 \end{cases} \quad (9)$$

tel que $A - LC$ est Hurwitz. Compte tenu de la présence d'une perturbation inconnue, cette dynamique est inexacte et il en résulte une erreur d'observation $e = x - \hat{x}$ qui vérifie

$$\begin{cases} \dot{e} &= (A - LC)e + (B_d - LD_d)d \\ e_0 &= x_0 - \hat{x}_0 \end{cases} \quad (10)$$

La condition initiale de ce système est bornée par $e_0 = x_0 - \hat{x}_0$ et $\bar{e}_0 = \bar{x}_0 - \hat{x}_0$. En utilisant notre connaissance des bornes de la perturbation d , nous allons définir un observateur par intervalles de l'erreur d'observation.

3.3 Observateur par intervalles de l'erreur d'observation

Comme détaillé dans de nombreuses publications du domaine dont [3], l'application des observateurs par intervalles repose sur une condition de coopérativité (voir Déf. 3) du système à encadrer – l'erreur d'observation dans notre cas. Dans la majorité des cas cependant, la matrice $A - LC$ n'est pas Metzler et un choix adéquat du gain L ne suffit pas¹. Un changement de variable est alors envisagé afin d'obtenir une matrice $M = P(A - LC)P^{-1}$ Metzler dans la nouvelle base. Deux approches ont été proposées :

1. changement de base à temps variant, voir [5] ;
2. Changement de base invariant, voir [7].

Dans cet article, nous adoptons la deuxième approche. Nous faisons l'hypothèse suivante :

Hypothèse 3. Deux matrices (P, L) ont été déterminées telles que $M = P(A - LC)P^{-1}$ est (Hurwitz) Metzler.

1. Considérer notamment le cas où C présente une colonne nulle.

Dans la nouvelle base, la dynamique de l'erreur d'observation (Éq. (10)) devient :

$$\begin{cases} \dot{e}_z &= P(A - LC)P^{-1}e_z + P(B_d - LD_d)d \\ e_z(0) &= Pe_0 \end{cases} \quad (11)$$

où $e_z = Pe$. A noter que $e_z(0)$ est inconnue car fonction de x_0 . Comme $M = P(A - LC)P^{-1}$ est Metzler, la dynamique de e_z est coopérative et nous pouvons donc appliquer les résultats habituels des observateurs par intervalles. Le système suivant, composé de la réunion de deux systèmes dynamiques, est un observateur par intervalles de l'erreur d'observation de l'Éq. (11) :

$$(G_{\text{int}}) \begin{cases} \dot{\underline{e}}_z &= M\underline{e}_z + B_d'^+ \underline{d} - B_d'^- \bar{d} \\ \dot{\bar{e}}_z &= M\bar{e}_z + B_d'^+ \bar{d} - B_d'^- \underline{d} \\ \underline{e}_z(0) &= P^+ \underline{e}_0 - P^- \bar{e}_0 \\ \bar{e}_z(0) &= P^+ \bar{e}_0 - P^- \underline{e}_0 \end{cases} \quad (12)$$

où $B_d' = P(B_d - LD_d)$ et où nous avons utilisé le Lemme 1 pour encadrer le vecteur $B_d'd$. Le retour dans les coordonnées d'origine s'effectue en utilisant la transformation suivante également obtenue à l'aide du Lemme 1 appliqué au vecteur Te_z :

$$\begin{cases} \underline{e} &= T^+ \underline{e}_z - T^- \bar{e}_z \\ \bar{e} &= T^+ \bar{e}_z - T^- \underline{e}_z \end{cases} \quad (13)$$

où $T = P^{-1}$. L'encadrement suivant de l'erreur d'observation de l'Éq. (10) est obtenu :

$$\underline{e}(t) \leq e(t) \leq \bar{e}(t), \forall t \quad (14)$$

3.4 Encadrement de l'état du système

Étant donné ce résultat, l'encadrement de l'état du système de l'Éq. (5) s'obtient de manière évidente en utilisant la définition de l'erreur d'observation $e = x - \hat{x}$:

$$\underline{x}(t) = \underline{e}(t) + \hat{x}(t) \leq x(t) \leq \bar{e}(t) + \hat{x}(t) = \bar{x}(t), \forall t \quad (15)$$

3.5 Remarques

Deux remarques peuvent être faites sur ce formalisme :

- l'hypothèse 3 peut être difficile à vérifier à la main dans le cas d'un système de dimension supérieure à 3. Se pose alors la question de la détermination aisée des matrices P et L ;
- Il est recommandé de chercher à garantir une bonne qualité d'estimation par l'intermédiaire du gain d'observation L afin d'obtenir un encadrement aussi précis que possible de l'état du système.

Ces deux remarques motivent la conception d'une méthode d'optimisation des matrices P et L telles que $M = P(A - LC)P^{-1}$ soit Metzler et que la dynamique de l'erreur d'observation ainsi obtenue réponde à des exigences de convergence.

4 Formulation du problème

Suite à ces remarques, il convient donc de formuler le problème de "construction" d'un observateur par intervalles comme suit :

Problème 1. Soit le système (G) de l'Éq. (5) ayant pour état $x \in \mathbb{R}^n$ et pour vecteur de mesures $y \in \mathbb{R}^m$. Ce système est supposé vérifier l'hypothèse 1. Il s'agit de trouver les matrices de transformation en matrice Metzler (P, L) telles que :

- (a) $M = P(A - LC)P^{-1}$ soit Hurwitz Metzler ;
 (b) La norme H_2 du transfert $T_{d \rightarrow x - \hat{x}}(s)$ vérifie

$$\|W(s)T_{d \rightarrow x - \hat{x}}(s)\|_2 \leq 1$$

où $W(s)$ permet de pondérer le transfert étudié selon la fréquence ;

- (c) Éventuellement, d'autres contraintes soient vérifiées comme par exemple le lieu d'évolution des racines de l'observateur.

En utilisant les méthodes existantes, un résultat acceptable ne peut être obtenu que grâce à des méthodes itératives d'analyse et de synthèse. Nous proposons dans la section suivante de reformuler le Pb. 1 (a) en problème de synthèse. Celui-ci sera résolu en utilisant une méthode d'optimisation non lisse qui permet d'obtenir un résultat optimal minimisant les critères formulés.

5 Approche proposée

Nous proposons dans cette section une nouvelle approche permettant de résoudre le Pb. 1. Elle est basée sur une reformulation du problème de recherche de transformation en problème de synthèse de loi de commande. Nous rappelons au préalable deux approches existantes pour résoudre le Pb. 1 (a). A noter qu'en utilisant ces méthodes, la vérification des sous-problèmes (b) et (c) ne peut s'effectuer que par analyse et n'entre pas directement en compte dans la détermination de la solution.

5.1 Approches existantes

Les deux approches suivantes ont pour avantage leur simplicité de mise en œuvre. En revanche, elles peuvent présenter un manque de précision numérique mais surtout, elles ne permettent pas de prendre en compte des contraintes supplémentaires telles que (b) ou (c).

5.1.1 Placement de pôles

Supposons que (A, C) soit observable. Le gain L est obtenu par placement de pôles tel que les pôles de $A - LC$ soient distincts, réels et stables. Soit P la matrice des vecteurs propres à droite de la matrice $A - LC$. Alors la matrice $M = P^{-1}(A - LC)P$ est Hurwitz Metzler.

Démonstration. Par placement, les pôles de la matrice $A - LC$ sont réels et distincts. La matrice $A - LC$ est donc diagonalisable. De plus, les matrices diagonales satisfont à la Déf. 1 d'une matrice Metzler. \square

Il est cependant important de noter que cette solution peut conduire à des gains L inappropriés, en particulier qui ne satisfont pas la contrainte (b). Il peut également être souhaitable de conserver des pôles complexes pour un observateur mis en œuvre sur un système physique auquel cas cette solution triviale ne convient pas.

5.1.2 Équation de Sylvester

Comme suggéré dans [7], la recherche des matrices P et L telles que $M = P(A - LC)P^{-1}$ soit Metzler peut se formuler comme la résolution de l'équation de Sylvester suivante :

$$-MP + PA = PLC = QC \tag{16}$$

où A est connue, L a été obtenue au préalable par exemple en résolvant un problème de placement de pôles et $(M, Q = PL)$ sont choisies arbitrairement telles que M et $A - LC$ partagent les mêmes valeurs propres et M est Hurwitz Metzler. Bien qu'elle soit facile à mettre en œuvre et propose une solution unique dans le cas où M et A ont des valeurs propres distinctes, cette méthode repose sur un choix *a priori* des matrices M et Q . Il n'est pas exclu que ce choix impacte les résultats de manière inadéquate. D'autre part, trouver une matrice M Metzler ayant des valeurs propres complexes

souhaitées est difficile puisqu'il n'est alors plus possible de sélectionner M comme une simple matrice triangulaire.

Outre les méthodes conventionnelles de résolution des équations de Sylvester – voir [14] – une méthode de résolution a été proposée dans [7] qui fait intervenir le Lemme suivant :

Lemme 2. [7, Lemme 1] Soient deux matrices M et L telles que $A - LC$ et M sont semblables. S'il existe deux vecteurs e_1 et e_2 tels que les paires $(A - LC, e_1)$ et (M, e_2) soient observables alors

$$P = O_2^{-1}O_1 \text{ et } Q = PL \quad (17)$$

satisfont l'Éq. (16) où

$$O_1 = \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_1(A - LC)^{n-1} \end{bmatrix}, \quad O_2 = \begin{bmatrix} e_2 \\ \vdots \\ e_2M^{n-1} \end{bmatrix} \quad (18)$$

Cependant, l'application de ce lemme nécessite toujours de fournir la valeur numérique souhaitée de la matrice M .

5.2 Formulation comme problème de stabilisation

En considérant le Pb. 1, nous constatons qu'une solution optimale aux sous-problèmes (b) et (c) peut être obtenue en utilisant une méthode de synthèse de loi de commande par optimisation non lisse. Nous souhaitons adapter le sous-problème (a) afin de mettre en œuvre cette méthode et d'obtenir une solution au Pb. 1.

En considérant la matrice $M = P(A - LC)P^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ainsi que la Déf. 1, le sous-problème (a) revient à déterminer P et L telles que les $n(n - 1)$ inégalités suivantes soient satisfaites :

$$\forall i \neq j, m_{ij}(P, L) = [P(A - LC)P^{-1}]_{ij} = d_i^\top P(A - LC)P^{-1}d_j \geq 0 \quad (19)$$

où d_i et d_j sont des vecteurs colonnes définis par $d_i = (\delta_{ik})_{1 \leq k \leq n}$. Pour une paire d'entiers (i, j) tels que $i \neq j$, le fait d'assurer l'inégalité (19) peut être considéré comme un problème de "déstabilisation" en les variables P et L . En considérant $-m_{ij}$ plutôt que m_{ij} lors de la synthèse, celui-ci devient un problème de stabilisation d'un système autonome fictif ayant $-m_{ij} \in \mathbb{R}$ pour matrice d'état et donc $-m_{ij}$ pour pôle réel.

5.3 Synthèse H_∞ par optimisation non lisse

Nous considérons le problème de synthèse de loi de commande structurée suivant :

Problème 2. Soit $C(s, p)$ un ensemble de systèmes linéaires invariants dépendant de paramètres réglables p . Soient w et z les vecteurs d'entrées et sorties de synthèse décrivant les transferts à contraindre. Trouver p tel que :

$$\min_p \max_{i=1, \dots, n_{\text{objectifs}}} \{ \|T_{w_i \rightarrow z_i}(C(s, p))\|_{2/\infty} \} \quad (20)$$

sous les contraintes $\|T_{w_j \rightarrow z_j}(C(s, p))\|_{2/\infty} \leq 1$ où $j = 1, \dots, n_{\text{contraintes}}$.

La terminologie habituelle consacrée aux problèmes d'optimisation est utilisée. L'entier $n_{\text{contraintes}}$ désigne le nombre de contraintes qui doivent être satisfaites par la solution optimale, autrement dit, pour des contraintes normalisées :

$$\forall j = 1, \dots, n_{\text{contraintes}}, \|T_{w_j \rightarrow z_j}(C(s, p))\|_{2/\infty} \leq 1$$

Dans le cas contraire, la solution n'est pas acceptable et les contraintes doivent être relaxées. L'entier $n_{\text{objectifs}}$ désigne le nombre de fonctions-objectifs qui doivent être minimisées, autrement dit, pour des fonctions-objectifs normalisées, il peut exister $i \leq n_{\text{objectifs}}$ tel que

$$\|T_{w_i \rightarrow z_i}(C(s, p))\|_{2/\infty} \geq 1$$

Le fait de structurer un contrôleur rend le problème de synthèse H_∞ non convexe. Pour résoudre ce type de problème où il faut également minimiser des fonctions non différentiables, nous avons recours à des techniques d'optimisation non lisse telles que présentées dans [12]. Ces techniques ont été implémentées dans un solveur numérique présenté dans [15]. Plus précisément, il est possible d'utiliser la routine `systeme` de MATLAB[®] fournie avec la *Robust Control Toolbox* depuis sa version 2012b.

Une solution localement optimale à ce problème est obtenue quand l'algorithme parvient à vérifier les contraintes tout en minimisant les fonctions-objectifs.

5.4 Solution numérique au problème de synthèse

Pour déterminer une solution (P, L) au Pb. 1, nous devons répondre au problème de base (a) auquel nous avons ajouté des contraintes de contrôle comme le sous-problème (b). Nous proposons d'utiliser une approche par optimisation non lisse telle que présentée dans [12]. Cette technique a été conçue pour la synthèse multi-modèles de contrôleurs structurés.

Dans un premier temps, les inégalités (19) sont reformulées en contraintes de stabilité. Celles-ci s'appliquent aux $n(n-1)$ systèmes fictifs suivants :

$$\forall i \neq j, G_M^{ij} = \left[\begin{array}{c|c} -m_{ij}(P, L) \in \mathbb{R} & 0_{1 \times n_{\text{syn}}} \\ \hline 0_{m_{\text{syn}} \times 1} & 0_{m_{\text{syn}} \times n_{\text{syn}}} \end{array} \right] \quad (21)$$

où n_{syn} (resp. m_{syn}) est le nombre d'entrées (resp. sorties) des modèles de synthèse. Ces nombres dépendent des contraintes formulées dans les sous-problèmes (b) et (c) du Pb. 1. Le fait d'assurer $\forall i \neq j, m_{ij} \geq 0$ est alors équivalent à assurer la stabilité du système fictif correspondant.

Pour résumer, la prise en compte des contraintes de synthèse se fait par l'intermédiaire des ensembles de modèles suivants :

- (C1) $n(n-1)$ modèles fictifs unidimensionnels $\{G_M^{ij}\}_{i,j}$ sur lesquels est formulée une contrainte sur la position du pôle ;
- (C2) (*optionnel*) $n(n-1)$ modèles fictifs unidimensionnels $\{\bar{G}_M^{ij}\}_{i,j}$ avec matrice d'état égale à $m_{ij}(P, L) - m_{ij}^{\max}$ et contrainte sur le pôle. Pour $0 < m_{ij}^{\max} < +\infty$, la considération de ces contraintes permet de réduire l'ensemble des solutions et améliore la convergence de l'algorithme ;
- (C3) modèle d'origine $G = (A, B_u, B_d, C, D_u, D_d)$ augmenté d'un observateur classique avec contrainte sur la qualité d'estimation permettant de vérifier (b) ;
- (C4) (*optionnel*) tout autre modèle permettant la formulation de contraintes de synthèse additionnelles, cf. (c).

L'algorithme de synthèse H_∞ par optimisation non lisse est ensuite exécuté sur une sélection de ces modèles et contraintes.

6 Exemples

Nous considérons des exemples fournis dans la littérature. L'objectif est de synthétiser un observateur par intervalles selon le formalisme présenté dans la Section 3 et en utilisant l'approche de la Section 5 lors de la détermination du changement de coordonnées. Les synthèses sont effectuées en utilisant la fonction `systeme` de la *Robust Control Toolbox 2014b* [16]².

Nous comparons les résultats en simulation (représentés en trait plein) avec ceux obtenus en utilisant respectivement :

- un changement de coordonnées variant avec le temps, tel que proposé dans [5] (résultats représentés en trait discontinu) ;
- Un changement de coordonnées invariant, en utilisant le Lemme 1 de [7] basé sur la résolution d'une équation de Sylvester (résultats représentés en trait discontinu pointillé).

2. Le code utilisé pour les synthèses et simulations est téléchargeable à l'adresse suivante : https://emmanuel-chambon.fr/assets/archives/jesa_matlab.zip

6.1 Système instable du 3^e ordre avec mode inobservable

Avec ce premier exemple, nous allons considérer la viabilité de notre approche pour synthétiser des matrices P et L telles que $P(A - LC)P^{-1}$ soit Metzler. L'utilisation d'un observateur par intervalles est également illustrée dans le cas d'un système instable. Une adaptation du système proposé dans [7] est considérée. Elle est donnée par la représentation d'état suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & \sqrt{3} \\ -1 & -\sqrt{3} & -4 \end{bmatrix}, B_u = \begin{bmatrix} -10.6 \\ 0 \\ 3.4 \end{bmatrix}, C = [1 \ 0 \ 0] \quad (22)$$

Le mode $-4 \pm i\sqrt{3}$ est inobservable mais stable. Le système vérifie donc l'hypothèse de détectabilité. Le pôle réel est quant à lui instable. La théorie des observateurs par intervalles reste applicable.

Pour résoudre ce problème, nous considérons les ensembles de modèles **(C1)** et **(C2)** avec $n = 3$ et $\forall(i, j), m_{ij}^{\max} = 20$. En utilisant un modèle additionnel **(C4)**, nous pouvons également nous assurer que la valeur propre réelle de la matrice $A - LC$ est contenue dans l'intervalle $[-50, -0.5]$. Une solution est obtenue en 2038 itérations après 4 tentatives. Les résultats suivants sont obtenus :

$$M = \begin{bmatrix} -2.8950 & 0.8352 & 0.0000 \\ 0.0000 & -3.0552 & 13.1911 \\ 0.7276 & 0.0000 & -3.0457 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 0.2984 & -0.2919 & -0.4853 \\ 0.3785 & 1.3925 & 0.0367 \\ 0.0581 & -0.1046 & 0.1802 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 2.9959 \\ 1.0233 \\ -1.5302 \end{bmatrix} \quad (23)$$

La matrice $M = P(A - LC)P^{-1}$ est bien Hurwitz Metzler. Un observateur par intervalles, tel que présenté à la Section 3, est alors utilisé. L'encadrement de l'état x du système est donné par l'Éq. (15). Pour les simulations, le système est initialisé à

$$x_0 = [-2 \ -2 \ -2] \quad (24)$$

et l'observateur à $\hat{x}_0 = 0$. Le signal d'entrée $u(t) = 1 + \sin(2t)$ proposé dans [7] est utilisé. L'état initial est inconnu mais il est supposé appartenir à l'intervalle $[-\bar{x}_0, \bar{x}_0]$ où $\bar{x}_0 = [2 \ 2 \ 2]$. Le système diverge rapidement ce qui rend l'étude directe de l'état délicate : nous avons tracé l'état sur la Fig. 1 ainsi que les bornes obtenues pour une simulation de 1s. En revanche, le tracé de l'erreur d'observation e donnée par l'Éq. (10) est plus clair puisque la dynamique associée converge (voir Fig. 2).

L'erreur initiale est assez importante. Elle est due à la mauvaise connaissance de l'état initial x_0 . Dans cet exemple sans perturbation, les bornes fournies par l'observateur par intervalles (Éqs. (12) et (13)) convergent bien vers l'erreur d'observation, comme le montre la Fig. 2.

Nous constatons sur les Figs. 1 et 2 que les résultats obtenus avec la méthode du changement de coordonnées à temps variant convergent plus rapidement dans ce cas sans perturbation. En raison de la présence de paramètres variants dans le changement de coordonnées équivalent à l'Éq. (13), il est difficile d'évaluer l'influence de la méthode sur le temps de réponse. Cependant, nous pouvons penser que cet exemple est en quelque sorte un cas pathologique pour notre méthode puisque celle-ci optimise la position des pôles au travers du gain L alors que la dynamique inobservable ne peut être déplacée. Nous ne pouvons donc pas rendre notre observateur par intervalles aussi rapide que nous le souhaitons. L'intervalle initial est également plus restreint. Ceci est dû aux changements de coordonnées successifs et donc à la valeur de la matrice P . Les résultats obtenus avec un changement de coordonnées à temps invariant déterminé à l'aide du Lemme 1 de [7] sont comparables.

6.2 Système stable du 6^e ordre avec deux modes complexes

Nous nous inspirons ici de l'exemple théorique présenté dans [5]. Les équations du modèle sont données par :

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + B_u u \\ y &= x_1 + d \end{cases} \quad (25)$$

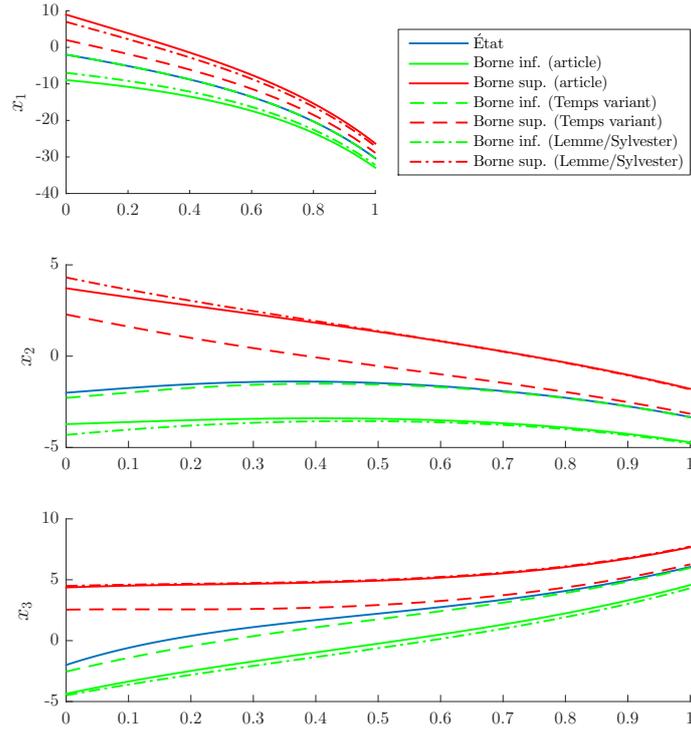


Figure 1 – Simulation de l'état x du système de l'Éq. (22) sur 1s et des bornes de l'observateur par intervalles, selon les approches.

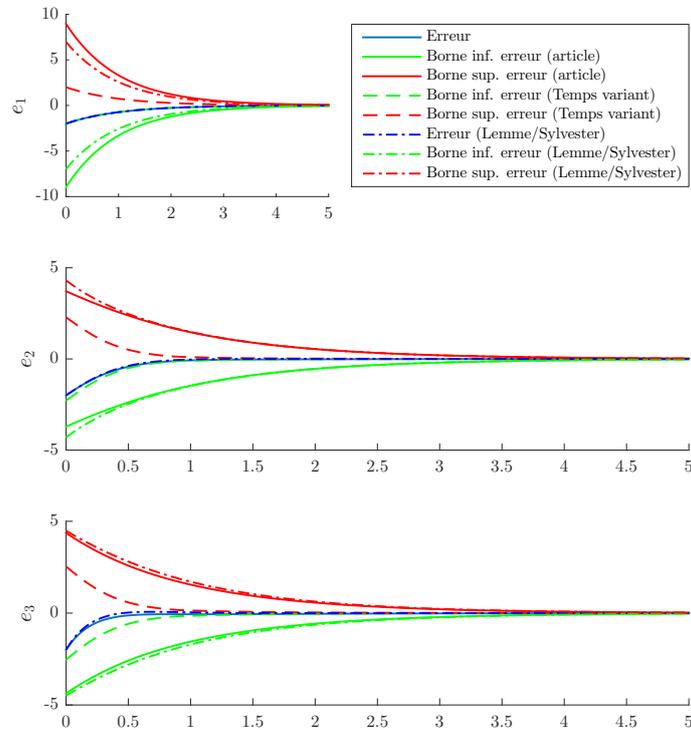


Figure 2 – Simulation de l'erreur d'observation e (Éq. (10)) sur 10s et des bornes de l'observateur par intervalles, voir Éq (12), selon les approches.

où $x \in \mathbb{R}^6$, $u(t) = \sin(t)$ et $d(t)$ est une perturbation bornée telle que $\forall t, -2 \leq d(t) \leq 1$. En simulation, la perturbation sera modélisée par un générateur de nombres aléatoires compris entre ces bornes. La représentation d'état de ce système est donnée par :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -3 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & -3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & -4 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, B = [B_d \ B_u] = \begin{bmatrix} 0 & -18 \\ 0 & -13 \\ 0 & -5 \\ 0 & -4 \\ 0 & -10 \\ 0 & 22 \end{bmatrix},$$

$$C = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0], D = [D_d \ D_u] = [1 \ 0] \quad (26)$$

Pour reprendre le formalisme de la Section 3, nous avons donc $D_d = 1$. Pour résoudre ce problème, nous considérons les ensembles de systèmes **(C1)** et **(C2)** avec $n = 6$ et

$$\forall(i, j), m_{ij}^{\max} = 2 \times 10^2$$

En ce qui concerne la qualité d'estimation, son évolution temporelle est donnée par le système :

$$\dot{e} = (A - LC)e - Ld \quad (27)$$

L'utilisation de ce modèle au sein de **(C3)** permet d'assurer

$$\left\| \frac{1}{0.4} T_{d \rightarrow e}(s) \right\|_2 \leq 1$$

En utilisant **(C4)**, il est également possible de garantir le positionnement des valeurs propres de $A - LC$ dans l'intervalle $[-50, -0.2]$. La solution de l'Éq. (28) est obtenue en 987 itérations après 4 tentatives.

$$M = \begin{bmatrix} -0.4204 & 0.0000 & 49.4965 & 0.0126 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0066 & -2.6589 & 0.0000 & 0.0095 & 0.9346 & 0.0006 \\ 0.0000 & 0.0005 & -1.3690 & 0.0028 & 0.0000 & 0.0009 \\ 0.0000 & 1.8884 & 0.0001 & -4.1689 & 0.0004 & 0.3441 \\ 0.0000 & 0.3055 & 33.9885 & 0.5088 & -4.4244 & 0.0019 \\ 0.0002 & 0.0111 & 0.0004 & 0.0775 & 0.0000 & -0.4249 \end{bmatrix},$$

$$P = \begin{bmatrix} 0.4957 & 0.6480 & 0.2276 & -0.5318 & -0.0539 & -0.7795 \\ -0.9682 & 0.4137 & -0.8754 & 0.7455 & 0.3747 & -0.8254 \\ 0.0130 & 0.0051 & 0.0075 & -0.0109 & -0.0064 & 0.0117 \\ -0.6335 & -0.1061 & -0.3812 & 2.1495 & 1.1971 & -0.9411 \\ -0.2995 & 0.1365 & -0.4704 & 0.2556 & 0.4862 & -0.2107 \\ -1.4245 & -2.0456 & -2.0258 & 2.9994 & 0.3713 & 1.8012 \end{bmatrix},$$

$$L = [-0.5335 \ -1.1505 \ -0.1095 \ -0.1934 \ -1.3002 \ -0.2598]^\top \quad (28)$$

Un observateur par intervalles tel que présenté à la Section 3 est alors implémenté. Un encadrement de l'état x du système est donné par l'Éq. (15). L'état initial est supposé appartenir à l'intervalle $[\underline{x}_0, \bar{x}_0]$ où $\underline{x}_0 = -\bar{x}_0$ et

$$\bar{x}_0 = [50 \ 50 \ 50 \ 50 \ 50 \ 50]^\top$$

Une simulation est effectuée en initialisant le système à $x_0 = \bar{x}_0$ et l'observateur à $\hat{x}_0 = 0$. La perturbation est simulée grâce à un générateur de nombres aléatoires. L'état et son estimée sont représentés sur la Fig. 3. Les bornes fournies par l'observateur par intervalles sont tracées sur la Fig. 4. Nous constatons que l'observateur par intervalles converge rapidement vers l'état malgré une erreur initiale importante due au choix des bornes initiales \underline{x}_0 et \bar{x}_0 et aux changements de base successifs. Il persiste un intervalle d'encadrement non nul compte tenu de la présence de la perturbation inconnue

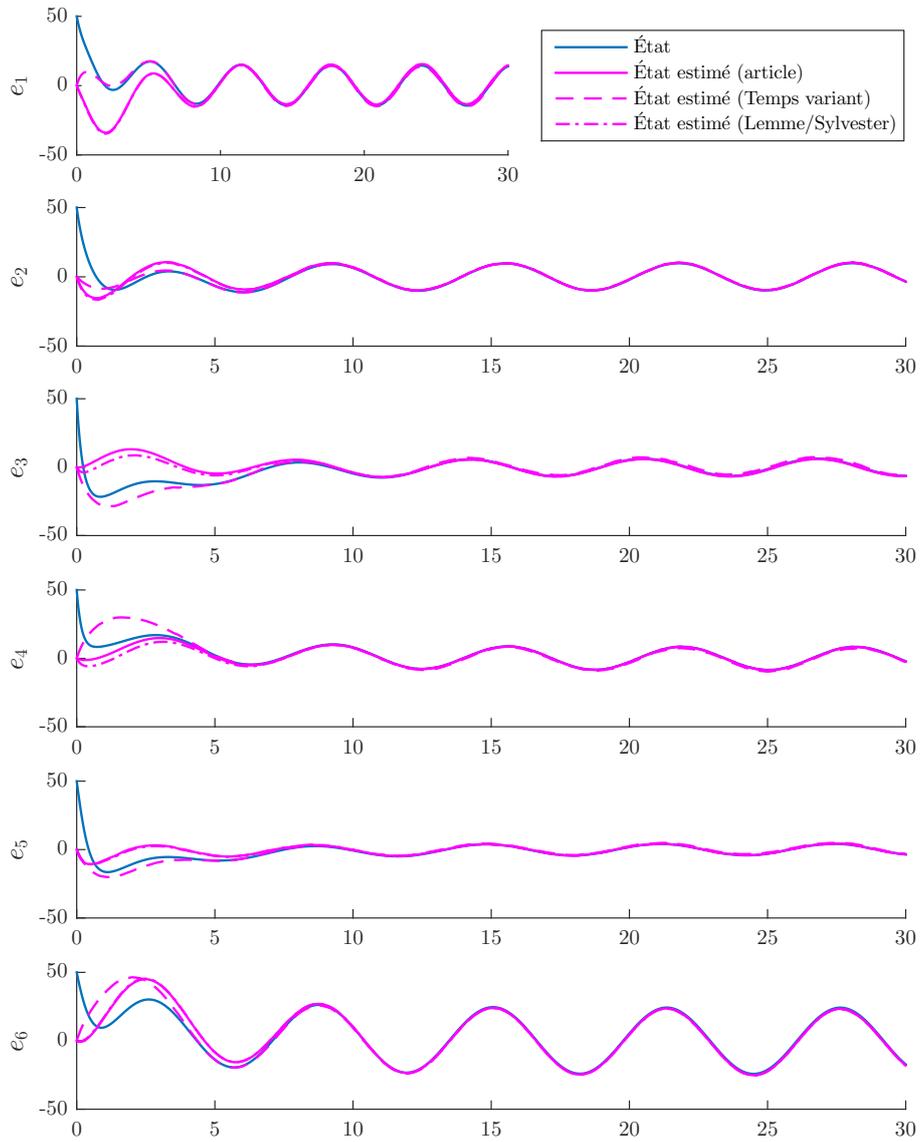


Figure 3 – Observateur classique de l'état x du système de l'Éq. (26), selon les approches.

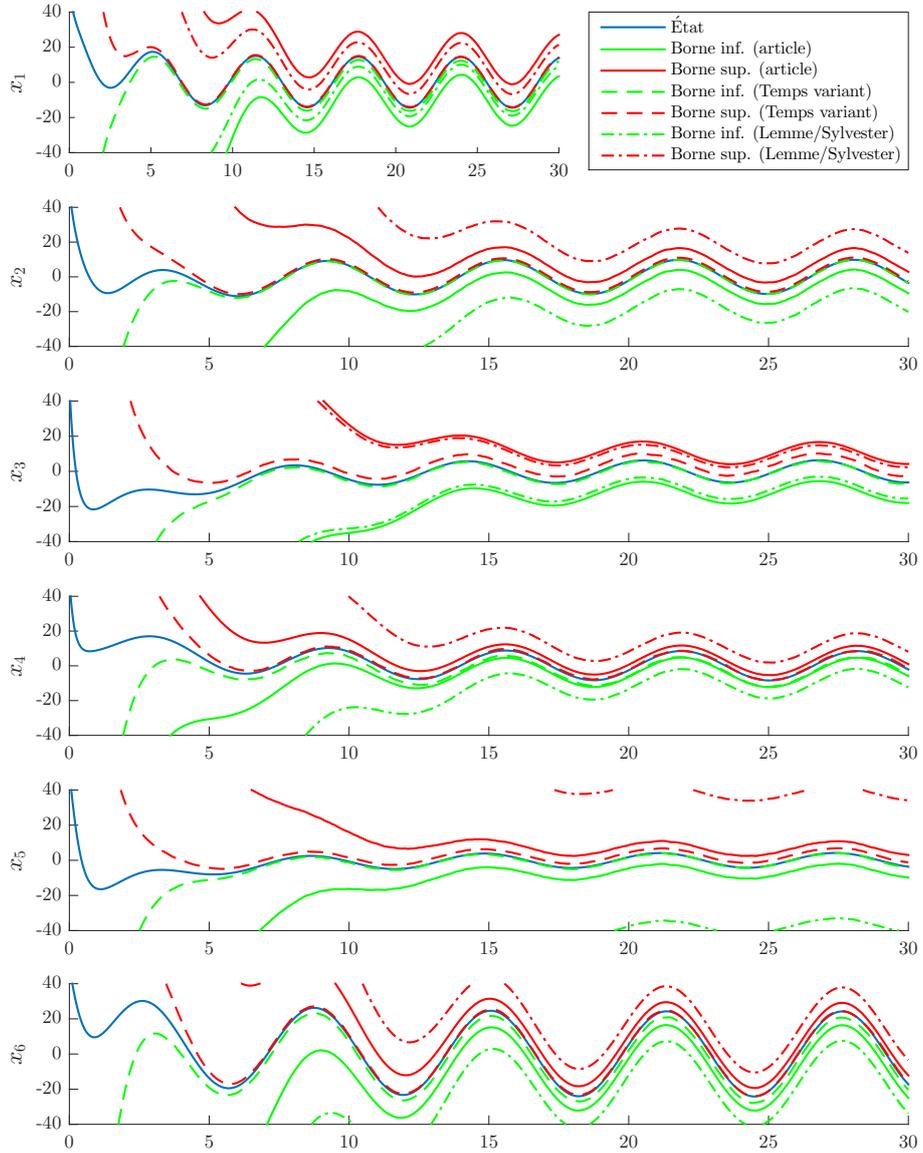


Figure 4 – Observateur par intervalles de l'état x du système de l'Éq. (26), selon les approches. Note : un zoom sur l'axe des ordonnées a été effectué.

d , que nous avons prise en compte dans la conception de l'observateur de l'Éq. (12) *via* ses bornes connues ($\underline{d} = -2, \bar{d} = 1$) qui introduisent un certain conservatisme.

Nous constatons sur la Fig. 4 que l'approche utilisant les résultats proposés dans l'article [5] fournit un meilleur résultat. En comparaison avec la méthode proposée dans [7] qui permet d'obtenir un changement de coordonnées constant, nous obtenons avec notre approche un moins bon résultat pour l'état x_1 , un résultat comparable pour l'état x_3 et de meilleurs résultats pour les états restants. Notons également que cette méthode basée sur la résolution d'une équation de Sylvester repose sur le choix d'une matrice M Metzler ayant les mêmes valeurs propres que la matrice $A - LC$. Dans le cas de pôles complexes conjugués, cette sélection peut s'avérer complexe. Dans notre approche, un tel choix n'est pas nécessaire et les matrices P et L (donc la matrice M) sont déterminées par l'algorithme, quelles que soient les valeurs propres obtenues pour la matrice $A - LC$.

L'approche par changement de coordonnées variant peut être plus difficile à mettre en œuvre et présente des instabilités numériques pour les grandes dimensions relatives à l'utilisation de la décomposition en forme de Jordan. Si une approche par changement de coordonnées invariant est choisie, notre méthode présente des résultats satisfaisants qui ne nécessite pas de choix préalable des matrices M et L . De plus, les méthodes d'optimisation mises en œuvre sont numériquement stables.

7 Conclusion et perspectives

Dans cet article, nous avons proposé une nouvelle méthode de construction d'un observateur par intervalles. Elle permet de déterminer un changement de coordonnées assurant la coopérativité du système considéré dans la nouvelle base. Dans le cas de systèmes instables, elle assure le calcul du gain d'observation L de l'observateur classique utilisé. En reformulant dans l'Éq. (21) les inégalités de l'Éq. (19) comme un problème de stabilisation de systèmes fictifs nous avons rendu possible l'utilisation de techniques habituellement réservées à la synthèse de lois de commande.

Cette technique a été appliquée avec succès à deux exemples tirés de la littérature. Dans chaque cas, nous avons utilisé le formalisme des observateurs par intervalles développé dans [5], [7] et [9] (et rappelé dans la Section 3) pour obtenir un encadrement de l'état du système, éventuellement en présence d'une perturbation inconnue sur la mesure. Nous avons comparé les résultats en simulation avec ceux obtenus en utilisant respectivement :

- un changement de coordonnées à temps variant, voir [5] ;
- Une autre méthode de détermination du changement de coordonnées invariant, voir [7].

Les perspectives d'amélioration de notre méthode sont multiples. En l'état actuel, l'approche proposée reste complexe en terme de capacités de calcul nécessaires. Pour remédier à cela, nous pourrions envisager la création d'un algorithme dédié pour résoudre le Pb. 1. Par ailleurs, nous nous sommes placés ici dans le cas d'un système *LTI* parfaitement connu et indépendant du temps. Il pourrait être envisagé de résoudre le même problème en considérant un système incertain ou dépendant d'un paramètre variant $\theta(t)$ sachant que des approches ont déjà été proposées dans ce cas [8]. Des systèmes discrets, à temps variant ou non-linéaires pourraient également être considérés.

En outre, le problème spécifique de trouver une base dans laquelle la coopérativité de l'erreur d'observation est assurée laisse à penser qu'une généralisation de l'approche à la détermination numérique d'un changement de base « optimal » au regard d'une propriété particulière est possible. Nous pensons par exemple à la détermination de réalisations positives de systèmes ou à la synthèse de lois de commande et d'observateurs positifs pour les systèmes positifs.

Références

- [1] H. L. Smith, *Monotone dynamical systems : an introduction to the theory of competitive and cooperative systems*, ser. Mathematical Surveys and Monographs. Providence, Rhode Island : American Mathematical Society, 1995, vol. 41. [pp. 1 and 3]
- [2] L. Mailleret, "Stabilisation globale des systèmes positifs mal connus - applications en biologie," Ph.D. dissertation, Université de Nice Sophia-Antipolis, Nice, May 2004. [p. 1]

- [3] J. L. Gouzé, A. Rapaport, and M. Z. Hadj-Sadok, “Interval observers for uncertain biological systems,” *Ecological Modelling*, vol. 133, no. 1-2, pp. 45–56, 2000. [pp. 1 and 4]
- [4] F. Mazenc and O. Bernard, “Asymptotically stable interval observers for planar systems with complex poles,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 55, no. 2, pp. 523–527, Feb. 2010. [p. 1]
- [5] ———, “Interval observers for linear time-invariant systems with disturbances,” *Automatica*, vol. 47, no. 1, pp. 140–147, 2011. [pp. 1, 3, 4, 8, 9, and 14]
- [6] F. Cacace, A. Germani, and C. Manes, “A new approach to design interval observers for linear systems,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 60, no. 6, pp. 1665–1670, Jun. 2015. [p. 1]
- [7] T. Raïssi, D. Efimov, and A. Zolghadri, “Interval state estimation for a class of nonlinear systems,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 57, no. 1, pp. 260–265, Jan. 2012. [pp. 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, and 14]
- [8] D. Efimov, T. Raïssi, and A. Zolghadri, “Control of nonlinear and LPV systems : interval observer-based framework,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 58, no. 3, pp. 773–778, Mar. 2013. [pp. 2 and 14]
- [9] T. N. Dinh, F. Mazenc, and S.-I. Niculescu, “Interval observer composed of observers for nonlinear systems,” in *Proc. of the European Control Conference*, Strasbourg, France, Jun. 2014, pp. 660–665. [pp. 2, 3, and 14]
- [10] J. V. Burke, D. Henrion, A. S. Lewis, and M. L. Overton, “HIFOO – a MATLAB package for fixed-order controller design and H_∞ optimization,” in *Proc. of the 5th IFAC Symposium on Robust Control Design*, Toulouse, France, Aug. 2006. [p. 2]
- [11] P. Apkarian and D. Noll, “Nonsmooth H_∞ synthesis,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 51, no. 1, pp. 71–86, Jan. 2006. [p. 2]
- [12] P. Apkarian, P. Gahinet, and C. Buhr, “Multi-model, multi-objective tuning of fixed-structure controllers,” in *Proc. of the 13th European Control Conference*, Strasbourg, France, Jun. 2014, pp. 856–861. [pp. 2 and 8]
- [13] D. Efimov, T. Raïssi, S. Chebotarev, and A. Zolghadri, “Interval state observer for nonlinear time-varying systems,” *Automatica*, vol. 49, no. 1, pp. 200–205, Jan. 2013. [p. 3]
- [14] R. H. Bartels and G. W. Stewart, “Solution of the matrix equation $AX+XB=C$,” *Communications of the ACM*, vol. 15, no. 9, pp. 820–826, Sep. 1972. [p. 7]
- [15] P. Gahinet and P. Apkarian, “Frequency-domain tuning of fixed-structure control systems,” in *Proc. of the UKACC International Conference on Control*, Sep. 2012, pp. 178–183. [p. 8]
- [16] MATLAB, *Robust Control Toolbox version 5.2 (R2014b)*. Natick, Massachusetts : The Math-Works Inc., 2014. [p. 8]