

## Chapitre 8

# Une méthode d'interpolation de structures estimation/commande pour des compensateurs $H_\infty$ et $\mu$

### 8.1. Introduction

Les méthodes d'interpolation constituent une façon très efficace de commander les systèmes dont la dynamique change avec les conditions de fonctionnement. Depuis la publication des premiers articles sur ce sujet, il y a presque trente ans, cette approche a été utilisée avec succès dans de nombreuses applications. En dépit de son succès au niveau applicatif, l'intérêt théorique pour l'interpolation de compensateurs pour les systèmes linéaires à paramètres variables (LPV) et pour les systèmes non linéaires n'a augmenté considérablement que récemment [RUG 91, SHAH 92, SHAM 90].

La plupart des méthodes d'interpolation récentes ont été développées sur la base d'un ensemble de conditions d'équilibre du système et d'un ensemble de compensateurs linéaires correspondants [KAM 95, LAW 95, RUG 91, SHAM 90]. Dans ce contexte, les conditions d'équilibre peuvent être paramétrisées par des variables d'interpolation. En supposant que ces variables sont mesurées en temps réel, le compensateur interpolé est un système non linéaire et/ou non stationnaire obtenu par interpolation simple ou par des réalisations non linéaires plus sophistiquées.

Lorsque les modèles nominaux sont linéaires à temps invariant (LTI), les concepteurs disposent de techniques linéaires modernes de commande optimale et robuste.

Elles permettent de concevoir des correcteurs linéaires qui fournissent un compromis raisonnable entre performance et robustesse autour des conditions de fonctionnement données. En comparaison, les techniques disponibles pour les interpoler ne sont pas encore suffisamment matures. Parmi les stratégies les plus utilisées dans l'approche d'interpolation classique, certaines techniques utilisent une interpolation linéaire de la structure pôle-zéro-gain de fonctions de transfert [NIC 93] ou de matrices de représentation d'état ou encore des gains d'observateur et de retour d'état [HYD 93, KEL 91]. Cependant, des difficultés théoriques, notamment concernant la complexité, et des questions délicates à propos de la stabilité dans la zone de transition ont été un obstacle majeur pour le développement de méthodes d'interpolation plus puissantes.

Malgré ces difficultés, quelques résultats théoriques dans le domaine de l'interpolation conventionnelle ont été publiés. Un algorithme pour interpoler linéairement les gains de retour d'état est proposé dans [SHAH 92], dans un contexte de placement de pôles. Dans [STI 00], les auteurs présentent deux méthodes pour l'interpolation de compensateurs : la première utilise des facteurs « coprimés » de fonctions de transfert et la seconde est basée sur les descriptions en espace d'état. Dans [STI 99], les gains de retour et d'observation d'état sont interpolés. Ces approches assurent, avec un certain conservatisme et sous la condition de variations lentes des variables d'interpolation, la stabilité exponentielle locale du système correspondant en boucle fermée.

Les techniques d'interpolation *velocity-based* et LPV fournissent d'autres voies de recherche. Des méthodes potentielles dans ce domaine ont aussi été explorées, incluant respectivement [LEI 98b, LEI 98c] et [APK 95, APK 98, PAC 94]. Ces techniques permettent un traitement systématique et intégré du problème d'interpolation par lequel les questions de stabilité/performance à temps variant sont analysées judicieusement. Cependant, ces techniques sont potentiellement très conservatives puisque des trajectoires irréalistes sont prises en considération et cela constitue certainement une faiblesse importante de cette théorie.

Dans les méthodes d'interpolation classiques, si les compensateurs linéaires changent considérablement d'un point de fonctionnement à l'autre, on introduit artificiellement une variation rapide de la dynamique en boucle fermée et cela peut induire un effet déstabilisant ou une perte de performance. Les compensateurs linéaires à interpoler devraient donc avoir des structures compatibles pour obtenir un comportement d'interpolation lisse. Puisque les comportements dynamiques des correcteurs interpolés peuvent être fortement dépendants des réalisations adoptées, ces problèmes structurels deviennent particulièrement critiques lorsque des données d'espace d'état sont utilisées pour l'interpolation. Des démonstrations claires de ce fait sont fournies dans [LEI 98a, STI 99, STI 00]. Dans [STI 99, STI 00], Stilwell et Rugh fournissent des conditions suffisantes et théoriquement justifiées sur le « placement » de compensateurs LTI telles qu'un compensateur interpolé qui préserve la stabilité existe toujours (voir aussi [STI 97a, STI 97b] et les exemples numériques inclus). Une limite supérieure du taux de variation du paramètre variable est aussi déterminée pour établir

la stabilité du système non stationnaire. Leurs résultats montrent clairement que des transitions satisfaisantes dépendent non seulement de la « distance » entre points de fonctionnement, mais aussi de la « proximité » entre les coefficients des compensateurs LTI à interpoler. Leurs méthodes sont, malheureusement, restreintes aux compensateurs d'ordre plein dans le contexte de l'interpolation en espace d'état. De plus, lorsque l'ensemble de points de fonctionnement est choisi convenablement, le problème de produire l'ensemble de réalisations d'état correspondant qui soit bien adapté à l'interpolation constitue un défi et reste ouvert dans le domaine de l'interpolation classique. D'autre part, les gains ne sont pas les seules variables à interpoler dans le cas particulier de la structure estimation/commande. L'ensemble des coefficients du compensateur dépend aussi du modèle en espace d'état du système. Alors, ces coefficients doivent évoluer conformément à la dynamique du système, c'est-à-dire que les variations ou non-linéarités significatives du système doivent être compensées convenablement par des ajustements adéquats dans le compensateur.

Dans cette étude, nous proposons une méthode pour dériver un ensemble de transformations linéaires d'espace d'état applicable à la famille originale de correcteurs linéaires dans le but de minimiser les différences de dynamiques entre des compensateurs de la famille transformée et de respecter la dynamique physique du système. Par conséquent, le compensateur non linéaire interpolé a une dynamique similaire à celle de la famille linéaire, ce qui conduit à des restrictions plus faibles sur la limite supérieure du taux de variation du paramètre qui garantit la stabilité. Dans [LEI 98a], différentes classes de réalisations satisfaisant la condition de l'équivalence linéaire locale étendue sont examinées et un support analytique pour un choix approprié de réalisations du correcteur non linéaire est fourni. Notre méthode est différente de cette approche dans le sens où les compensateurs équivalents ne sont calculés que pour l'ensemble de correcteurs linéaires. Des structures estimation/commande sont obtenues et il n'y a pas de restrictions sur la stratégie pour les interpoler (sous la condition que les coefficients du compensateur soient choisis comme fonctions continues de la variable d'interpolation). En outre, notre méthodologie produit un ensemble de paramètres de Youla stables ayant une structure particulière qui tolère une simple interpolation linéaire. Les méthodes d'interpolation proposées dans [STI 99] et [STI 00] qui préservent la stabilité sont donc généralisées pour des compensateurs d'ordre augmenté.

Les structures estimation/commande présentent des caractéristiques importantes qui deviennent particulièrement intéressantes dans le problème d'interpolation pour des applications réalistes. Des techniques modernes de conception, comme la synthèse  $H_\infty$  et la  $\mu$ -synthèse et leurs variantes, produisent des correcteurs d'ordre élevé dont la dynamique reste obscure au concepteur et peut changer considérablement avec les conditions de fonctionnement. L'interpolation de représentations d'état générales de ces correcteurs est discutable d'un point de vue de la mise en œuvre et, dans un grand nombre de cas, peut conduire à un effort calculatoire insurmontable, en particulier

pour les problèmes qui nécessitent un ajustement rapide des données du compensateur en temps réel. Au contraire, pour les structures estimation/commande, en supposant que le modèle linéaire soit disponible en temps réel, il n'est requis que le stockage de deux gains statiques et d'un paramètre de Youla pour mettre à jour la dynamique du correcteur à chaque instant de l'échantillonnage. De plus, dans la pratique, le paramètre d'interpolation est généralement choisi comme une fonction des mesures et/ou des états du système physique. Il est donc intéressant d'estimer efficacement les états pour tout le domaine de variation du paramètre. Des techniques pratiques pour calculer les formes estimation/commande pour des compensateurs arbitraires ont été proposées, notamment dans [ALA 99, BEN 85] et références incluses. Néanmoins, ces méthodes traitent les compensateurs LTI d'une façon séparée et déconnectée qui mène à un ensemble de transformations d'état qui ne sont pas toujours adaptées au contexte de l'interpolation.

Ce chapitre est organisé comme suit : dans la section 8.2, nous présentons un algorithme fondé sur les techniques proposées dans [ALA 99] pour le calcul de compensateurs, équivalents du point de vue entrée-sortie, plus adaptés aux techniques d'interpolation. La décomposition de Schur de la matrice dynamique en boucle fermée est essentiellement distincte de celle utilisée dans [ALA 99], ce qui conduit à des transformations d'état bien adaptées à notre contexte. Les difficultés numériques inhérentes à ce calcul sont aussi discutées et des solutions proposées. Dans la section 8.3, nous proposons une méthode pour construire des compensateurs adjacents ayant la même structure d'observateur et conservant un comportement dynamique continu pour chacun de leurs éléments, indépendamment de la stratégie d'interpolation adoptée. Un ensemble de transformations d'espace d'état des compensateurs est obtenu par continuation d'une partition choisie des pôles de la boucle fermée. Dans la section 8.4, enfin, les techniques présentées sont illustrées par des exemples numériques empruntés à la littérature.

Les notations utilisées dans ce chapitre sont standards. La notation  $\mathbb{R}$  est utilisée pour l'ensemble des nombres réels et l'indice supérieur  $T$  pour la transposition de matrices. Le spectre d'une matrice  $M$  est noté  $spec(M)$ . La norme 2 euclidienne pour les vecteurs et la norme 2 induite (norme spectrale) pour les matrices sont dénotées  $\|\cdot\|$ . Pour les ensembles,  $\bar{S}$  désigne le complément de  $S$  et  $\{\phi\}$  l'ensemble vide ou nul. Pour les variables complexes,  $\bar{\lambda}$  désigne le conjugué de  $\lambda$ . La notation  $\mathcal{RH}_\infty$  dénote l'ensemble des fonctions de transfert rationnelles réelles qui sont analytiques en  $Re(s) > 0$ , c'est-à-dire l'ensemble des fonctions de transfert propres rationnelles et asymptotiquement stables avec des coefficients réels. La réalisation d'état d'une fonction de transfert  $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$  est dénotée :

$$\left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$$

## 8.2. Structures estimation/commande

Dans cette section, nous rappelons les techniques proposées dans [ALA 99] (paragraphes 8.2.1 et 8.2.2) permettant de calculer des représentations équivalentes de type estimation/commande d'un compensateur stabilisant arbitraire associé à un système donné. Nous proposons aussi un algorithme (une variante d'une méthode présentée dans [ALA 99]) permettant le calcul de compensateurs équivalents du point de vue entrée-sortie bien adaptés aux techniques d'interpolation (paragraphes 8.2.3 et 8.2.4). Les techniques dans [ALA 99] sont générales et prennent en compte des compensateurs à temps discret ou continu et d'ordre réduit, plein ou augmenté. Elles sont aussi applicables à des systèmes et des correcteurs propres ou non strictement propres. Cependant, nous sommes intéressés surtout par des compensateurs dont les ordres sont égaux ou plus grands que l'ordre du système, en particulier les correcteurs de type  $H_\infty$  et  $\mu$ . Les compensateurs d'ordre réduit, les systèmes non strictement propres et les cas à temps discret sont omis pour simplifier la présentation, mais sont également traitables par notre technique.

On peut trouver dans la littérature de la commande plusieurs expressions souvent utilisées comme termes équivalents pour « compensateur de structure estimation/commande » : *observer-based structure*, *observer state (feedback) controller*, *LQG (form) controller*, *estimator/controller structure (or form)*, *observer/controller structure*, *state estimator-state feedback structure*, entre autres.

**DÉFINITION 8.1** ([ZHO 96]).— *Etant donné un système générique  $(A, B, C)$  avec  $(A, B)$  stabilisable et  $(C, A)$  détectable, alors il existe des matrices réelles  $K_c$  et  $K_f$  telles que les valeurs propres de  $A - BK_c$  et  $A - K_f C$  sont stables. Le compensateur noté  $u = \bar{K}(s)y$  et :*

$$\bar{K}(s) = \left[ \begin{array}{c|c} A - BK_c - K_f C & K_f \\ \hline -K_c & 0 \end{array} \right] \quad [8.1]$$

*est appelé « compensateur de structure estimation/commande ».*

### 8.2.1. Formulation du problème

Considérons les systèmes en boucle fermée représentés dans la figure 8.1, où :

$$G(s) = \left[ \begin{array}{cc} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{array} \right] \quad [8.2]$$

et :

$$P(s) = \left[ \begin{array}{cc} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{array} \right] \quad [8.3]$$

sont respectivement les modèles du système nominal et du système augmenté. Les signaux  $w$ ,  $e$ ,  $z$  et  $y$  sont respectivement l'entrée exogène, la commande, la sortie commandée et la mesure de  $P(s)$ .

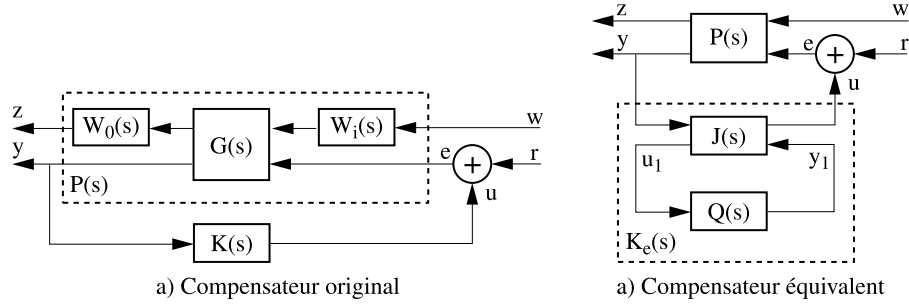


Figure 8.1. Systèmes en boucle fermée

Le système nominal  $G_{22}(s)$ , supposé strictement propre sans perte de généralité, est défini par la représentation d'état stabilisable et détectable suivante :

$$G_{22}(s) = \left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & 0 \end{array} \right] \quad [8.4]$$

avec  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  et  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ .

Nous supposons aussi que le système augmenté :

$$P_{22}(s) = \left[ \begin{array}{c|c} A_p & B_p \\ \hline C_p & 0 \end{array} \right] \quad [8.5]$$

où  $spec(A_p) \supseteq spec(A)$ , contient des dynamiques fictives supplémentaires (pondérations fréquentielles et/ou multiplicateurs dynamiques  $W_i(s)$  et  $W_o(s)$ ).  $G_{22}(s)$  correspond à la dynamique physique (éventuellement incluant des actionneurs et des détecteurs) dont les trajectoires de l'état doivent être stabilisées et estimées par un compensateur de structure estimation/commande.

Le problème peut être énoncé comme suit : étant donné les systèmes  $G_{22}(s)$  et  $P_{22}(s)$  et un compensateur stabilisant original (figure 8.1a) :

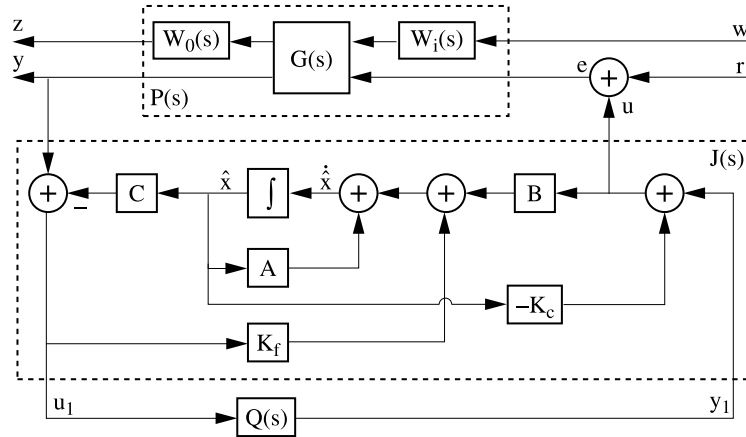
$$K(s) = \left[ \begin{array}{c|c} A_k & B_k \\ \hline C_k & D_k \end{array} \right] \quad [8.6]$$

où  $A_k \in \mathbb{R}^{n_k \times n_k}$ ,  $n_k \geq n$ ,  $D_k \in \mathbb{R}^{m \times p}$  et  $B_k, C_k$  sont des matrices réelles de dimensions compatibles, *calculer* un compensateur qui présente une structure estimation/commande séparée de manière explicite (figure 8.1b) :

$$K_e(s) = \left[ \begin{array}{c|c} T^{-1}A_kT & T^{-1}B_k \\ \hline C_kT & D_k \end{array} \right] \quad [8.7]$$

où  $T$  est une transformation linéaire inversible, *tel que* [8.7] soit équivalent à [8.6] du point de vue entrée-sortie.

L'ensemble de tous les compensateurs stabilisants est représenté par le schéma fonctionnel de la figure 8.2.  $K_e(s)$  est une transformation fractionnaire linéaire (TFL) inférieure en ce qui concerne le paramètre de Youla  $Q(s) \in \mathcal{RH}_\infty$  et  $K_c, K_f$  sont choisis tels que  $A - BK_c$  et  $A - K_fC$  soient stables. Il est intéressant de remarquer que ces contraintes de stabilité sont satisfaites si l'équivalence entre [8.6] et [8.7] est valable.



**Figure 8.2.** Paramétrisation de Youla sur la structure estimation/commande

La fonction de transfert entre  $[y; y_1]$  et  $[u; u_1]$  est la matrice de coefficients :

$$J(s) = \left[ \begin{array}{c|cc} A - BK_c - K_fC & K_f & B \\ \hline -K_c & 0 & I_{m \times m} \\ -C & I_{p \times p} & 0 \end{array} \right] \quad [8.8]$$

de la TFL  $K_e(s)$ , c'est-à-dire  $K_e(s) = J_{11} + J_{12}Q(I + J_{22}Q)^{-1}J_{21}$ . De plus,  $J(s)$  peut être défini comme un compensateur de structure estimation/commande pour  $G_{22}(s)$  ayant  $\hat{x}$  pour état, où  $\hat{x}$  est un estimé asymptotique de l'état réel  $x$  de  $G_{22}(s)$ . En d'autres termes,  $x - \hat{x}$  tend vers 0 lorsque  $t$  tend vers l'infini.

Si nous notons :

$$Q(s) = \left[ \begin{array}{c|c} A_q & B_q \\ \hline C_q & D_q \end{array} \right] \quad [8.9]$$

une réalisation minimale de  $Q$ , où  $\dim(A_q) = n_q = n_k - n$  et  $B_q, C_q, D_q$  ont des dimensions compatibles, il vient :

$$K_e(s) = \left[ \begin{array}{cc|c} A - BK_c - K_f C - BD_q C & BC_q & K_f + BD_q \\ -B_q C & A_q & B_q \\ \hline -(K_c + D_q C) & C_q & D_q \end{array} \right] \quad [8.10]$$

et la fonction de transfert en boucle fermée entre  $r$  et  $y$  devient :

$$\begin{aligned} T_{yr}(s) &= (I - G_{22}K_e)^{-1}G_{22} \\ &= \left[ \begin{array}{ccc|c} A + BD_q C & -B(K_c + D_q C) & BC_q & B \\ (K_f + BD_q)C & A - BK_c - K_f C - BD_q C & BC_q & 0 \\ B_q C & -B_q C & A_q & 0 \\ \hline C & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{aligned} \quad [8.11]$$

Le vecteur d'état de [8.11] contient les états du système (ou états physiques), ceux de l'observateur et ceux du paramètre de Youla :  $[x; \hat{x}; x_q]$ .

Pour faciliter l'interprétation de la dynamique en boucle fermée, nous appliquons à [8.11] la transformation d'état suivante :

$$\begin{bmatrix} x \\ x_q \\ \hat{x} - x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \\ -I & I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \\ x_q \end{bmatrix} \quad [8.12]$$

La nouvelle forme de l'espace d'état en boucle fermée [8.13] fait donc intervenir l'erreur d'estimation  $\hat{x} - x$  :

$$T_{yr}(s) = \left[ \begin{array}{ccc|c} A - BK_c & BC_q & -B(K_c + D_q C) & B \\ 0 & A_q & -B_q C & 0 \\ 0 & 0 & A - K_f C & -B \\ \hline C & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad [8.13]$$

A partir de cette représentation, le principe de séparation apparaît clairement. Les valeurs propres de la boucle fermée peuvent donc être séparées selon les  $n$  valeurs propres du retour d'état, les  $n$  valeurs propres du filtre d'estimation et les  $n_q$  valeurs



propres du paramètre de Youla :  $\text{spec}(A - BK_c)$ ,  $\text{spec}(A - K_f C)$  et  $\text{spec}(A_q)$ , respectivement.

La fonction de transfert en boucle fermée peut aussi être représentée à partir du compensateur original [8.6] :

$$\begin{aligned} T_{yr}(s) &= (I - G_{22}K)^{-1}G_{22} \\ &= \left[ \begin{array}{cc|c} A + BD_k C & BC_k & B \\ B_k C & A_k & 0 \\ \hline C & 0 & 0 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} A_{cl} & B_{cl} \\ \hline C_{cl} & 0 \end{array} \right] \end{aligned} \quad [8.14]$$

dont le vecteur d'état est  $[x; T_1 \hat{x}; T_2 x_q]$ , avec :

$$\begin{bmatrix} T_1 & T_2 \end{bmatrix} = T \quad [8.15]$$

A l'aide de ces définitions et notations, nous allons pouvoir écrire des conditions qui assurent l'équivalence entrée-sortie des représentations [8.6] et [8.7].

### 8.2.2. La structure estimation/commande équivalente

A partir de [8.7] et [8.10], on peut déduire :

$$A_k T - T \begin{bmatrix} A + BD_k C & 0 \\ 0 & A_q \end{bmatrix} - T \begin{bmatrix} BC_k \\ 0 \end{bmatrix} T + \begin{bmatrix} B_k C & 0 \end{bmatrix} = 0 \quad [8.16]$$

$$T^{-1} B_k = \begin{bmatrix} K_f + BD_q \\ B_q \end{bmatrix} \quad [8.17]$$

$$C_k T = \begin{bmatrix} -(K_c + D_q C) & C_q \end{bmatrix} \quad [8.18]$$

et :

$$D_k = D_q \quad [8.19]$$

Le problème se réduit donc à résoudre en  $T \in \mathbb{R}^{n_k \times n_k}$  l'équation [8.16] et ensuite à calculer  $K_c$ ,  $K_f$ ,  $B_q$ ,  $C_q$  et  $D_q$  en utilisant les relations [8.17], [8.18] et [8.19]. Remarquons que  $A_q$  est inconnue en [8.16] et correspond donc à une variable supplémentaire. Il convient aussi de remarquer que la solution théorique de [8.16] est simplifiée si nous la partageons en deux problèmes dissociés.

En adoptant une partition appropriée de  $T$  en [8.15], on obtient donc :

$$T_1(A + BD_kC) - A_kT_1 + T_1BC_kT_1 - B_kC = 0 \quad [8.20]$$

et :

$$(A_k - T_1BC_k)T_2 = T_2A_q \quad [8.21]$$

L'équation de Riccati généralisée, non symétrique et rectangulaire [8.20] peut être encore reformulée :

$$\begin{bmatrix} -T_1 & I \end{bmatrix} \overbrace{\begin{bmatrix} A + BD_kC & BC_k \\ B_kC & A_k \end{bmatrix}}^H \begin{bmatrix} I \\ T_1 \end{bmatrix} = 0 \quad [8.22]$$

Par conséquent, la matrice hamiltonienne  $H$  associée à l'équation de Riccati [8.20] n'est autre que la matrice dynamique du système en boucle fermée  $A_{cl}$ , exprimée en [8.14]. L'équation de Riccati [8.20] peut donc être résolue en  $T_1 \in \mathbb{R}^{n_k \times n}$  par des techniques classiques de calcul d'espaces invariants qui consistent à :

– trouver un sous-espace invariant associé à un ensemble de  $n$  valeurs propres  $spec(\Lambda_n)$ , choisies parmi  $2n + n_q$  valeurs propres en  $spec(A_{cl})$ , c'est-à-dire :

$$\begin{bmatrix} A + BD_kC & BC_k \\ B_kC & A_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \Lambda_n \quad [8.23]$$

où  $U_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $U_2 \in \mathbb{R}^{n_k \times n}$ . De tels sous-espaces peuvent être aisément calculés par une décomposition de Schur de la matrice  $A_{cl}$  ;

– calculer la solution :

$$T_1 = U_2U_1^{-1} \quad [8.24]$$

dont l'existence est garantie lorsque les valeurs propres de la boucle fermée sont distinctes.

En utilisant ce dernier résultat et de façon similaire, l'équation de Sylvester en  $T_2 \in \mathbb{R}^{n_k \times n_q}$  [8.21] se réduit à calculer un sous-espace invariant associé à un ensemble de  $n_q$  valeurs propres  $spec(A_q)$ , choisies parmi  $n + n_q$  valeurs propres de  $spec(A_k - T_1BC_k)$ .

En plus, à partir de [8.7], [8.10] et [8.18], on peut vérifier aussi que :

$$A_k - T_1BC_k = T \begin{bmatrix} A - K_fC & 0 \\ -B_qC & A_q \end{bmatrix} T^{-1} \quad [8.25]$$

Nous pouvons donc établir la proposition suivante.

**PROPOSITION 8.1.**— *Les  $n$  valeurs propres choisies pour le calcul de la solution  $T_1$  de l'équation [8.20], en utilisant l'approche hamiltonienne, sont les  $n$  valeurs propres du retour d'état associé à la structure estimation/commande équivalente, c'est-à-dire  $\text{spec}(A - BK_c)$ . De plus, la dynamique en boucle fermée restante (qui n'est pas choisie pour la solution de [8.20], c'est-à-dire la dynamique de  $A_k - T_1 BC_k$ ) contient la dynamique d'estimation  $(A - K_f C)$  augmentée de celle du paramètre de Youla  $(A_q)$ .*

Cette proposition est une conséquence directe de [8.13] et [8.25] et constitue le cœur de notre technique. A partir de ce résultat, nous établirons, dans le paragraphe 8.2.4, un algorithme pour la sélection des valeurs propres.

Il existe une combinatoire de solutions selon le choix de la partition des valeurs propres en boucle fermée : premièrement pour le calcul de  $T_1$  et deuxièmement pour le calcul de  $T_2$ . Dans le paragraphe 8.2.3, quelques considérations supplémentaires à propos des solutions possibles de [8.20] et de [8.21] sont présentées et discutées.

Ainsi, étant donné un système d'ordre  $n$  et un correcteur d'ordre  $n_k$ , on peut calculer une transformation linéaire  $T^{-1}x_k$  des états du compensateur qui les sépare en deux parties : l'estimation des états physiques et les états du paramètre de Youla.

### 8.2.3. Sélection des valeurs propres et restrictions

#### 8.2.3.1. Gouvernabilité et observabilité

Il existe plusieurs solutions admissibles pour [8.20] et [8.21]. Chacune correspond, respectivement, à un choix particulier de  $n$  et  $n_q$  valeurs propres parmi l'ensemble de valeurs propres de la boucle fermée. Cependant, certaines sélections de modes ne sont pas admissibles, selon les propositions suivantes.

**PROPOSITION 8.2.**— *Considérons l'équation [8.23]. Les propriétés duales suivantes sont valables :*

- 1) *si  $\exists \lambda \notin \text{spec}(\Lambda_n)$  telle que  $\lambda$  est ingouvernable par  $(A, B)$ , alors  $U_1$  est singulière ;*
- 2) *si  $\exists \lambda \in \text{spec}(\Lambda_n)$  telle que  $\lambda$  est inobservable par  $(A, C)$ , alors  $U_2$  présente une déficience de rang de colonne.*

**PROPOSITION 8.3.**— *Considérons les équations [8.20] et [8.21]. Si  $\exists \lambda \in \text{spec}(A_q)$  telle que  $\lambda$  est inobservable par  $(A, C)$  ou ingouvernable par  $(A, B)$ , alors  $[T_1 \ T_2]$  est singulière.*

Les preuves de ces propositions sont directes en utilisant les relations précédentes et les propriétés de gouvernabilité ou d'observabilité.

### 8.2.3.2. Pôles autoconjugués

Une autre restriction qui peut réduire le nombre de choix admissibles concerne la non-séparation des paires de pôles autoconjugués, c'est-à-dire que ces paires doivent rester dans la même partition de l'ensemble des valeurs propres de la boucle fermée, si nous cherchons des compensateurs équivalents n'ayant que des coefficients réels. Notons qu'un tel choix n'est pas toujours possible. Par exemple, si l'on considère les cas où les pôles de la boucle fermée sont tous complexes et  $n$  est impair, alors les gains auront des coefficients complexes. Pour résoudre ce problème, il est impératif d'augmenter la dynamique du modèle du système avec quelques modes réels (stables) ingouvernables ou inobservables ou de changer judicieusement son ordre avant de concevoir le correcteur. On peut montrer qu'une condition nécessaire pour l'existence d'une paramétrisation réelle est : le nombre de valeurs propres de la boucle fermée doit être plus grand ou égal à  $2(\text{parité}(n)) + \text{parité}(n_k - n)$ .

### 8.2.3.3. Modes doubles

Un problème difficile apparaît lorsque le spectre de la boucle fermée contient quelques modes doubles ou « presque » doubles. Une matrice presque non diagonalisable peut avoir une matrice de vecteurs propres mal conditionnée et sa structure de bloc de Jordan est numériquement difficile à déterminer. Si  $A_{cl}$  est non diagonalisable, alors  $U = [U_1; U_2]$  en [8.23] et/ou  $T_2$  en [8.21] peuvent avoir une déficience de rang de colonne selon la partition de  $\text{spec}(A_{cl})$  choisie.

En échangeant systématiquement les positions des valeurs propres au moyen des rotations de Givens, nous pouvons déplacer tout sous-ensemble de  $\text{spec}(A_{cl})$  à la tête de sa matrice de forme de Schur. Alors, nous pouvons exécuter une séquence de décompositions de Schur, chacune d'elles ayant des valeurs propres ordonnées de façon appropriée, pour diagonaliser  $A_{cl}$  par bloc (pour les détails, voir [GOL 96]) en utilisant une transformation linéaire bien conditionnée :

$$A_{cl}U_{sc} = U_{sc}\Lambda_{cl} \quad [8.26]$$

$$\Lambda_{cl} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_i, \dots, \Lambda_r, \dots, \Lambda_c, \dots, \lambda_{n_k+n}) \quad [8.27]$$

où  $\lambda_i$  ( $i = 1, \dots, \lambda_{n_k+n}$ ) sont les valeurs propres distinctes et :

$$\Lambda_r = \begin{bmatrix} \lambda_r & r \\ 0 & \lambda_r' \end{bmatrix} \quad [8.28]$$

et :

$$\Lambda_c = \begin{bmatrix} \lambda_c & 0 & c & 0 \\ 0 & \bar{\lambda}_c & 0 & \bar{c} \\ 0 & 0 & \lambda'_c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\lambda}'_c \end{bmatrix} \quad [8.29]$$

sont des blocs qui correspondent, respectivement, à des valeurs propres répétées réelles  $\lambda_r \approx \lambda'_r$ , et complexes  $\lambda_c \approx \lambda'_c$ .

Les colonnes de  $U_{sc}$  en [8.26] qui correspondent aux valeurs propres distinctes et aux premières valeurs propres répétées  $\lambda_r$ ,  $\lambda_c$  et  $\bar{\lambda}_c$  sont leurs vecteurs propres associés et forment une base orthonormée pour le sous-espace invariant associé. Les colonnes qui restent sont appelées *vecteurs propres généralisés*. Un ensemble de colonnes qui contiennent un des vecteurs généralisés constitue une base orthonormée pour un sous-espace invariant de  $A_{cl}$  à condition que le vecteur propre respectif qui correspond à la première valeur propre répétée soit inclus. C'est-à-dire qu'un ensemble qui contient le vecteur propre généralisé associé à  $\lambda'_r$ ,  $\lambda'_c$  et/ou  $\bar{\lambda}'_c$  devrait aussi contenir le vecteur propre associé à  $\lambda_r$ ,  $\lambda_c$  et/ou  $\bar{\lambda}_c$ . Cependant, un meilleur conditionnement numérique de  $T$  est obtenu généralement si nous ne sélectionnons aucun vecteur propre généralisé pour composer  $U$  et si nous ne sélectionnons aucun mode double pour  $A_q$ . Cette analyse peut être généralisée pour des valeurs propres multiples.

Puisque la plupart des colonnes sont des vecteurs propres, cette forme nous permet de faire la nécessaire analyse de gouvernabilité et d'observabilité modale (paragraphe 8.2.3.6). Par contre, une telle analyse serait compliquée, voire impossible, en utilisant une forme triangulaire supérieure.

#### 8.2.3.4. Calcul de la forme réelle

Le calcul de sous-espaces invariants exige de manipuler des grandeurs complexes lorsque les spectres de l'hamiltonienne contiennent des modes complexes. La propagation d'erreurs d'arrondis peut conduire à des matrices de transformation qui ne sont pas rigoureusement réelles. C'est pour cette raison qu'une forme réelle de [8.26] est préférable.

Une alternative aux formes de Schur réordonnées réelles est d'appliquer en [8.26] la transformation suivante :

$$A_{cl}U_{sc}J = U_{sc}JJ^{-1}\Lambda_{cl}J \quad [8.30]$$

où  $J$  est une matrice bloc-diagonale dont la diagonale comporte un 1 pour un mode réel et un bloc  $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -j1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & j1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$  pour un mode complexe (répété ou distinct). En supposant que :

$$\Lambda_{cl} = \text{diag} \left( \lambda_1, \lambda_2, \bar{\lambda}_2, \begin{bmatrix} \lambda_3 & r_3 \\ 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda_4 & 0 & c_4 & 0 \\ 0 & \bar{\lambda}_4 & 0 & \bar{c}_4 \\ 0 & 0 & \lambda_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\lambda}_4 \end{bmatrix}, \dots \right) \quad [8.31]$$

où les valeurs propres  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  et  $\lambda_4$  sont, respectivement, réelle distincte, complexe distincte, réelle répétée et complexe répétée, on obtient alors :

$$W_{sc} = U_{sc}J = [u_1 \ u_2^R \ u_2^I \ u_3 \ u_3' \ u_4^R \ u_4^I \ u_4^{R'} \ u_4^{I'} \ \dots] \quad [8.32]$$

où l'indice supérieur  $R$  indique la partie réelle et l'indice supérieur  $I$  indique la partie imaginaire, et :

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}_{cl} &= J^{-1}\Lambda_{cl}J \\ &= \text{diag} \left( \lambda_1, \begin{bmatrix} \lambda_2^R & \lambda_2^I \\ -\lambda_2^I & \lambda_2^R \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda_3 & r_3 \\ 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda_4^R & \lambda_4^I & c_4^R & c_4^I \\ -\lambda_4^I & \lambda_4^R & -c_4^I & c_4^R \\ 0 & 0 & \lambda_4^R & \lambda_4^I \\ 0 & 0 & -\lambda_4^I & \lambda_4^R \end{bmatrix}, \dots \right) \end{aligned} \quad [8.33]$$

Les matrices transformées ne font donc intervenir que des grandeurs réelles.

### 8.2.3.5. Un problème d'identification de mode

Pour résoudre [8.16], il est nécessaire de partitionner  $\text{spec}(A_{cl})$  en trois sous-ensembles, à savoir l'ensemble des modes de retour d'état, celui des modes du paramètre de Youla et celui des modes d'estimation, conformément aux contraintes présentées dans les paragraphes précédents. Le deuxième pas est le calcul de deux sous-espaces invariants : un premier invariant de dimension  $n$  de la matrice  $A_{cl}$  et un autre invariant de dimension  $n_q$  de la matrice  $A_k - T_1BC_k$ . Ces sous-espaces sont associés, respectivement, à l'ensemble des  $n$  pôles de retour d'état en [8.23] et à l'ensemble des  $n_q$  pôles du paramètre de Youla en [8.21].

Si, d'une part cette approche facilite la compréhension conceptuelle du problème, d'autre part une difficulté numérique peut se produire à cause de la différence entre les dimensions de  $A_{cl}$  et  $A_k$ , notamment lors de l'identification de certains pôles presque doubles dans  $\text{spec}(A_k - T_1BC_k)$  parmi ceux dans  $\text{spec}(A_{cl})$  pour désigner  $A_q$  en [8.21].

Si l'on réécrit [8.16] comme suit, on trouve une façon similaire de le partager en deux problèmes dissociés tout en maintenant le même ordre des matrices :

$$\left[ \begin{array}{c|c} -T & I \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc|c} A + BD_k C & 0 & BC_k \\ 0 & A_q & 0 \\ \hline B_k C & 0 & A_k \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} I \\ T \end{array} \right] = 0 \quad [8.34]$$

Notons qu'un sous-espace invariant de dimension  $n_k$  est caractérisé par :

$$\left[ \begin{array}{ccc} A + BD_k C & 0 & BC_k \\ 0 & A_q & 0 \\ B_k C & 0 & A_k \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} V_{11} \\ V_{12} \\ V_2 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} V_{11} \\ V_{12} \\ V_2 \end{array} \right] \Lambda_k \quad [8.35]$$

où  $\Lambda_k$  est une sous-matrice de  $\Lambda_{cl}$  en [8.31] ou de  $\tilde{\Lambda}_{cl}$  en [8.33].  $\Lambda_k$  est associée à un ensemble de  $n + n_q$  pôles choisis parmi ceux de la matrice hamiltonienne qui correspondent à l'ensemble des pôles de retour d'état et du paramètre de Youla. Donc, ce problème est équivalent à :

$$\left[ \begin{array}{cc} A + BD_k C & BC_k \\ B_k C & A_k \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} V_{11} \\ V_2 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} V_{11} \\ V_2 \end{array} \right] \Lambda_k \quad [8.36]$$

qui est similaire à [8.23], et :

$$A_q V_{12} = V_{12} \Lambda_k \quad [8.37]$$

qui constitue un problème supplémentaire qui consiste à trouver un espace invariant de  $A_q$  de dimension  $n_k$ . L'espace invariant de dimension maximale de  $A_q$  est naturellement l'espace tout entier qui est de dimension  $n_q < n_k$ . En respectant la partition choisie des spectres de l'hamiltonienne, on fera donc le choix d'une base de dimension  $n_q$  pour former un tel espace que l'on complétera par des vecteurs nuls afin de satisfaire la contrainte de dimension imposée par  $\Lambda_k$ , c'est-à-dire :

$$V_{12} = [0 \dots 0 \ e_1 \ 0 \dots 0 \ e_2 \ 0 \dots 0 \ e_{n_q} \ 0 \dots 0] \quad [8.38]$$

où la sous-matrice  $[e_1, \dots, e_{n_q}]$  peut être choisie comme la base canonique de  $\mathbb{R}^{n_q}$  de façon à réduire le nombre de coefficients de  $Q(s)$  à interpoler. Cet arrangement revient à séparer  $n_q$  pôles du paramètre de Youla parmi les  $n_k$  pôles choisis en [8.36]. Puisque les positions des valeurs propres sont complètement définies par  $\Lambda_k$  en [8.36] et [8.37], il devient facile de les identifier.

Finalement, le changement de base  $T$  sera obtenu par :

$$T = V_2 \left[ \begin{array}{c} V_{11} \\ V_{12} \end{array} \right]^{-1} \quad [8.39]$$

Etant donné la nouvelle formulation [8.36] à [8.39], les conditions établies dans les propositions 8.2 et 8.3 deviennent comme suit.

PROPOSITION 8.4.– *On a les propriétés suivantes :*

- 1) si  $\exists \lambda \notin \text{spec}(\Lambda_k)$  telle que  $\lambda$  est ingouvernable par  $(A, B)$ , alors  $[V_{11}; V_{12}]$  est singulière ;
- 2) si  $\exists \lambda \in \text{spec}(\Lambda_k)$  telle que  $\lambda$  est inobservable par  $(A, C)$ , alors  $V_2$  est singulière ;
- 3) si  $\exists \lambda \in \text{spec}(A_q)$  telle que  $\lambda$  est inobservable par  $(A, C)$  ou ingouvernable par  $(A, B)$ , alors  $[V_{11}; V_{12}]$  est singulière.

Les propriétés énoncées dans cette proposition fournissent des contraintes qui doivent être satisfaites pour la construction d'une solution inversible  $T$ .

#### 8.2.3.6. Des règles supplémentaires de sélection

Des expériences calculatoires ont indiqué que de meilleurs résultats dans la procédure d'interpolation et d'estimation physique sont obtenus si l'on respecte les règles supplémentaires suivantes pour sélectionner la partition de valeurs propres de la boucle fermée :

- affecter à  $\text{spec}(A - BK_c)$  les pôles qui sont le moins gouvernable afin de réduire les gains de retour d'état. De petits gains assurent une certaine « proximité » des pôles de la boucle ouverte, respectant la dynamique naturelle du système physique ;
- affecter à  $\text{spec}(A - K_f C)$  les pôles les plus rapides et les moins observables afin d'avoir une estimation d'état efficace et réduire les gains de l'observateur ;
- affecter à  $\text{spec}(A_q)$  des pôles rapides de telle façon que le paramètre de Youla se comporte comme une transmission directe dans le compensateur.

La manière de classer les modes d'après leur gouvernabilité et leur observabilité est le premier point que nous allons examiner. Une méthode utile de mesurer la gouvernabilité d'un mode  $\lambda_i$  à partir d'une entrée  $j$  d'un système  $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$  consiste à calculer  $c_{ij} = \frac{|v_i^T b_j|}{\|v_i\| \|b_j\|}$ , où  $v_i$  est le vecteur propre à gauche associé à  $\lambda_i$ ,  $b_j$  la  $j$ -ième colonne de  $\tilde{B}$  et  $v_i^T b_j$  est appelé le facteur de gouvernabilité de  $\lambda_i$ . Cette méthode a été utilisée dans des applications pratiques, dans de petits et grands systèmes [HAM 89, MAR 90]. La gouvernabilité globale peut être mesurée par  $c_i = \frac{\|v_i^T \tilde{B}\|}{\|v_i\|}$ .

Si  $\tilde{A}$  n'a que des valeurs propres distinctes et si l'on suppose que  $A_{cl} = \tilde{A}$  en [8.26], alors chaque colonne  $u_i$  de  $U_{sc}$  et chaque colonne  $v_i$  de  $U_{sc}^{-T}$  sont, respectivement, un vecteur propre normalisé à droite et à gauche associé à la valeur propre  $\lambda_i$ .



Donc,  $c_i$  peut être réécrit comme :

$$c_i = \|\mathcal{B}(i, :)\| \quad [8.40]$$

où  $\mathcal{B} = U_{sc}^{-1}\tilde{B}$ .

Nous avons aussi des coefficients pour mesurer l'observabilité modale :

$$o_i = \|\mathcal{C}(:, i)\| \quad [8.41]$$

où  $\mathcal{C} = \tilde{C}U_{sc}$ .

La matrice  $\mathcal{B}$  ( $\mathcal{C}$ ) est appelée matrice de gouvernabilité (observabilité) de mode. Si la  $i$ -ième ligne (colonne) de  $\mathcal{B}$  ( $\mathcal{C}$ ) est nulle, alors  $\lambda_i$  est ingouvernable (inobservable). En examinant ces matrices, on peut donc classer les modes en gouvernables et observables, en gouvernables et inobservables, en ingouvernables et observables et en ingouvernables et inobservables. Ainsi, la gouvernabilité et l'observabilité absolues des modes sont complètement définies par  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$ . En plus, ces matrices sont aussi utiles pour classer les modes selon leur gouvernabilité (observabilité) relative puisque : moins gouvernable (observable) est  $\lambda_i$ , plus petit est le coefficient  $c_i$  ( $o_i$ ).

En supposant que  $\tilde{A}$  a un mode double réel (ou complexe)  $\lambda_i = \lambda'_i$  comme en [8.28] (ou [8.29]), on peut dire que :

- $c'_i(o'_i)$  « grand »  $\iff \lambda_i$  et  $\lambda'_i$  sont gouvernables (observables) ;
- $c'_i(o'_i)$  « petit »  $\iff \lambda'_i$  est ingouvernable (inobservable) ;
- $c'_i(o'_i)$  « petit » et  $c_i(o_i)$  « grand »  $\implies \lambda_i$  est gouvernable (observable) ;
- $c'_i(o'_i)$  « petit » et  $c_i(o_i)$  « petit »  $\iff \lambda_i$  est ingouvernable (inobservable).

Une analyse similaire pour des pôles multiples serait une tâche plus difficile, mais des extensions sont possibles.

Le deuxième point consiste à faire une analyse de gouvernabilité et d'observabilité modale des pôles de la boucle fermée pour respecter les contraintes posées par le système en boucle ouverte, c'est-à-dire comment définir  $\tilde{B}$  et  $\tilde{C}$  pour calculer  $c_i$  et  $o_i$ . En effet, d'après la proposition 8.4, aucune restriction à propos de la gouvernabilité et de l'observabilité en boucle fermée n'est imposée. De plus, un problème numérique peut se produire pour identifier quelle valeur propre en boucle fermée correspond exactement à un certain pôle ingouvernable ou inobservable en boucle ouverte, notamment lorsque les spectres en boucle fermée contiennent des modes (presque) doubles.

En considérant les réalisations d'état de la boucle ouverte et fermée [8.4] et [8.14], nous pouvons établir la proposition suivante dont la preuve est triviale.

PROPOSITION 8.5.– *Supposons que  $C_k$  et  $B_k$  soient de rang plein et considérons que  $\tilde{A} = A_{cl}$ ,  $\tilde{B} = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & I_{n_k \times n_k} \end{bmatrix}$  et  $\tilde{C} = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I_{n_k \times n_k} \end{bmatrix}$ , alors les propriétés duales suivantes sont valables :*

- 1)  $\lambda_i$  est ingouvernable par  $(A, B) \iff \lambda_i$  est ingouvernable par  $(\tilde{A}, \tilde{B})$ ;
- 2)  $\lambda_i$  est inobservable par  $(A, C) \iff \lambda_i$  est inobservable par  $(\tilde{A}, \tilde{C})$ .

Le triplet  $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$  peut donc être utilisé pour analyser l'observabilité et la gouvernabilité des modes de la boucle fermée.

Nous pouvons aussi utiliser une mesure de la contribution de chaque mode en boucle fermée aux états du système bouclé pour choisir ceux qui sont les plus « affectés » par les modes du système physique. Le  $i$ -ième élément du vecteur propre à gauche  $v_j$  mesure l'impact du mode  $\lambda_j$  dans la  $i$ -ième variable d'état, et le  $j$ -ième élément du vecteur propre à droite  $u_i$  quantifie la contribution de cette activité. Le produit de ces deux éléments est adimensionnel, c'est-à-dire indépendant du choix d'unités, et mesure la participation nette. Ainsi, la matrice [8.42], appelée matrice de participation [KUN 94], combine les vecteurs propres normalisés à droite et à gauche et fournit une façon efficace et pratique de mesurer l'association entre les modes et les variables d'état de la boucle fermée :

$$P = U_{sc} \cdot *U_{sc}^{-T} = [p_{ij}] \quad [8.42]$$

où  $*$  dénote la multiplication élément par élément et  $p_{ij}$  est une mesure de la participation relative du  $j$ -ième mode dans la  $i$ -ième variable d'état. Ce coefficient est appelé facteur de participation. La somme des facteurs de participation associés à une variable d'état ou à un mode quelconque est égale à 1 :  $\sum_{j=1}^{n+n_k} p_{ij} = 1, \forall i$  et  $\sum_{i=1}^{n+n_k} p_{ij} = 1, \forall j$ . Il est facile de montrer que  $p_{ij}$  est égal à la sensibilité de la valeur propre  $\lambda_j$  à l'élément  $a_{ii}$  de la diagonale de la matrice d'état en boucle fermée,  $\frac{\partial \lambda_j}{\partial a_{ii}}$ .

Si les états de la boucle fermée sont ordonnés comme en [8.14], la somme des amplitudes des  $n$  premiers éléments de la  $j$ -ième colonne de  $P$  donne la participation totale de  $\lambda_j$  dans les  $n$  états de  $G(s)$ .

Ainsi, les coefficients :

$$p_j = \sum_{i=1}^n |p_{ij}|, \quad j = 1, \dots, n + n_k \quad [8.43]$$

peuvent nous aider à choisir une partition des valeurs propres en boucle fermée qui respecte le comportement dynamique du système physique.

#### 8.2.4. Algorithme pour le calcul des compensateurs équivalents

Dans ce paragraphe, nous résumons les points présentés et discutés dans les paragraphes précédents et nous décrivons les étapes principales du calcul d'un compensateur équivalent.

ÉTAPE 1.– Calculer la matrice hamiltonienne  $A_{cl}$  d'après [8.14] et la diagonaliser par bloc selon [8.26].

ÉTAPE 2.– Classifier les modes de la boucle fermée d'après leur gouvernabilité et leur observabilité en utilisant [8.40] et [8.41] sur le triplet  $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$  défini dans la proposition 8.5.

ÉTAPE 3.– Classifier les modes de la boucle fermée d'après leurs atténuations (partie réelle).

ÉTAPE 4.– En se basant sur les résultats des étapes 2 et 3, définir les ensembles de valeurs propres en boucle fermée suivants :

- $\mathcal{U}_c = \{\text{valeurs propres ingouvernables} + \text{faiblement gouvernables}\}$  ;
- $\mathcal{U}_o = \{\text{valeurs propres inobservables} + \text{faiblement observables}\}$  ;
- $\mathcal{S}_c = \{N_c \text{ valeurs propres moins gouvernables} - \mathcal{U}_c\}$ , où le nombre entier  $N_c$  est initialisé tel que  $N_c + \text{length}(\mathcal{U}_c) \approx n$  et les paires autoconjuguées ne soient pas séparées ;
- $\mathcal{S}_o = \{N_o \text{ valeurs propres les plus observables}\}$ , où le nombre entier  $N_o$  est initialisé tel que  $N_o + \text{length}(\mathcal{U}_o) \approx n$  et les paires autoconjuguées ne soient pas séparées ;
- $\mathcal{S}_r = \{N_r \text{ valeurs propres les plus lents}\}$ , où le nombre entier  $N_r$  est initialisé tel que  $N_r \approx n$  et les paires autoconjuguées ne soient pas séparées.

ÉTAPE 5.– Choisir  $\mathcal{P}_c = \{(\mathcal{S}_c - \overline{\mathcal{S}_o} - \mathcal{U}_o) \cap (\mathcal{S}_r)\} \cup \{\mathcal{U}_c\}$  l'ensemble des  $n$  pôles de retour d'état :

- attribuer les nombres entiers 1 ou 2 à  $k_c$ ,  $k_o$  et  $k_r$  tels que les paires autoconjuguées ne soient pas séparées dans les opérations suivantes ;
- si  $\text{length}(\mathcal{P}_c) < n$ , alors : faire alternativement  $N_c \leftarrow (N_c + k_c)$ ,  $N_o \leftarrow (N_o + k_o)$  et  $N_r \leftarrow (N_r + k_r)$ , et aller à l'étape 4, c'est-à-dire commencer en changeant seulement  $N_c$  et aller à l'étape 4, après seulement  $N_o$  et aller à l'étape 4, et après seulement  $N_r$  et aller à l'étape 4, et répéter ce procédé jusqu'à obtenir  $\text{length}(\mathcal{P}_c) = n$  ;
- si  $\text{length}(\mathcal{P}_c) > n$ , alors : faire alternativement (comme au-dessus)  $N_c \leftarrow (N_c - k_c)$ ,  $N_o \leftarrow (N_o - k_o)$  et  $N_r \leftarrow (N_r - k_r)$  ; aller à l'étape 4 ;

ÉTAPE 6.– En utilisant seulement les  $n_k$  valeurs propres restantes  $\{\overline{\mathcal{P}_c}\}$ , redéfinir :

- $\mathcal{S}_o = \{N_o \text{ valeurs propres les moins observables} - \mathcal{U}_o\}$ , où le nombre entier  $N_o$  est initialisé tel que  $N_o + \text{length}(\mathcal{U}_o) \approx n$  et les paires autoconjuguées ne soient pas séparées ;

–  $\mathcal{S}_r = \{N_r \text{ valeurs propres les plus rapides}\}$ , où le nombre entier  $N_r$  est initialisé tel que  $N_r \approx n$  et les paires autoconjuguées ne soient pas séparées.

ETAPE 7.– Choisir  $\mathcal{P}_o = \{\mathcal{S}_o \cap \mathcal{S}_r\} \cup \{\mathcal{U}_o\}$  l'ensemble des  $n$  pôles d'estimation d'état :

– attribuer les nombres entiers 1 ou 2 à  $k_o$  et  $k_r$  tels que les paires autoconjuguées ne soient pas séparées dans les opérations suivantes ;

– si  $length(\mathcal{P}_o) < n$ , alors : faire alternativement (de façon similaire à l'étape 5)  $N_o \leftarrow (N_o + k_o)$  et  $N_r \leftarrow (N_r + k_r)$  ; aller à l'étape 6 ;

– si  $length(\mathcal{P}_o) > n$ , alors : faire alternativement (comme au-dessus)  $N_o \leftarrow (N_o - k_o)$  et  $N_r \leftarrow (N_r - k_r)$  ; aller à l'étape 6.

ETAPE 8.– Choisir les valeurs propres restantes  $\mathcal{P}_y = \overline{\{\mathcal{P}_c \cup \mathcal{P}_o\}}$  comme les pôles du paramètre de Youla.

ETAPE 9.– Calculer la forme réelle [8.30] et séparer le sous-espace invariant de dimension  $n_k$  [8.36] associé aux  $n_k$  valeurs propres  $\{\mathcal{P}_y \cup \mathcal{P}_c\}$ .

ETAPE 10.– D'après les positions de  $\{\mathcal{P}_y\}$  en  $\Lambda_k$ , calculer un espace invariant de dimension  $n_k$  de  $A_q$  [8.38] et calculer  $A_q$  en utilisant :

$$A_q = V_{12} \Lambda_k V_{12}^{-1} \quad [8.44]$$

ETAPE 11.– Calculer  $T$  [8.39] et ensuite calculer  $K_c$ ,  $K_f$ ,  $B_q$ ,  $C_q$  et  $D_q$  en utilisant [8.17], [8.18] et [8.19].

Notons que le choix de la partition des valeurs propres est essentiellement fondé sur leur gouvernabilité et leur observabilité – absolues et relatives – et sur leurs atténuations. Cependant, si l'on classe les valeurs propres de l'hamiltonienne selon leurs facteurs de participation [8.43] dans l'étape 2 et si l'on définit  $\mathcal{S}_c = \{N_c \text{ valeurs propres les plus affectées} - \mathcal{U}_c\}$ , dans les étapes 4 et 6, cet algorithme sera capable de sélectionner les valeurs propres en n'utilisant que leurs gouvernabilité et observabilité absolues, leurs facteurs de participation et leurs atténuations.

Une mise en œuvre de cet algorithme devrait aussi considérer le fait que certaines règles peuvent être conflictuelles et ne sont pas obligatoires, alors que d'autres sont indispensables. Par exemple, on peut jouer sur les relations établies pour le choix de  $\mathcal{P}_c$  et  $\mathcal{P}_o$ , dans les étapes 5 et 7, de façon à obtenir  $length(\mathcal{P}_c) = length(\mathcal{P}_o) = n$ . En revanche, les conditions autour de modes doubles et de pôles autoconjugués (paragraphes 8.2.3.2 et 8.2.3.3) doivent être poursuivies strictement.

Observons que lorsque  $n_k$  est strictement plus grande que  $n$ , le compensateur équivalent comprend un paramètre de Youla dynamique et un estimateur physique. Mais, lorsque  $n_k = n$ ,  $A_q$  et  $T_2$  sont vides en [8.21] et le problème se réduit à résoudre [8.20] en  $T_1 = T$  et ensuite à calculer  $K_f$ ,  $K_c$  et  $D_q$  en utilisant les relations [8.17]-[8.19], c'est-à-dire :

$$K_f = T^{-1} B_k - B D_k \quad [8.45]$$

$$K_c = -C_k T - D_k C \quad [8.46]$$

et :

$$Q(s) = D_q = D_k \quad [8.47]$$

Nous avons donc un paramètre de Youla statique et une structure estimation/commande qui peut être interprétée de deux façons différentes :

– estimation augmentée: le système augmenté  $P_{22}$  remplace le système nominal  $G_{22}$  ; la dynamique du système physique est incluse en  $P_{22}$  et l'état de  $G_{22}$  sera estimé si le sens physique est conservé dans l'état augmenté ;

– estimation physique:  $P_{22}$  remplace  $G_{22}$  avec  $W_i(s)$  et  $W_o(s)$  statiques (ou nulles) et  $\dim(A_p) = n$  (ou  $P_{22} = G_{22}$ ).

Enfin, il est également intéressant de remarquer que le paramètre de Youla dynamique peut être envisagé comme un paramètre de Youla statique avec une estimation augmentée. En effet, si nous calculons un compensateur équivalent comprenant un  $Q$ -paramètre dynamique,  $(A_q, B_q, C_q, D_q)$  et une structure estimation/commande  $J(s) = f(A, B, C, K_c, K_f)$ , nous pouvons l'interpréter comme un compensateur ayant un  $Q$ -paramètre statique  $D_q$  et une structure estimation augmentée [ZHO 96] :

$$\tilde{J}(s) = f(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{K}_c, \tilde{K}_f) \quad [8.48]$$

où  $\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A_q \end{bmatrix}$ ,  $\tilde{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\tilde{C} = [C \ 0]$ ,  $\tilde{K}_c = [K_c \ -C_q]$  et  $\tilde{K}_f = \begin{bmatrix} K_f \\ B_q \end{bmatrix}$ . Ici,  $\tilde{J}(s)$  est un compensateur équivalent avec une structure estimation/commande pour le système fictif augmenté :

$$\tilde{P}(s) = \left[ \begin{array}{cc|c} A & 0 & B \\ 0 & A_q & 0 \\ \hline C & 0 & 0 \end{array} \right] \quad [8.49]$$

Si l'on considère qu'un compensateur équivalent pour  $P_{22}(s)$  est aussi un compensateur équivalent pour  $\tilde{P}(s)$ , que les deux systèmes incluent des dynamiques fictives ( $W_i(s)$  et  $W_o(s)$  dans le premier et  $A_q$  dans le deuxième) et que généralement  $\dim(A_p) = n_k$  (surtout dans les synthèses  $H_\infty$  et  $\mu$ ), cela suggère de remplacer  $G_{22}(s)$  par  $P_{22}(s)$  dans cet algorithme. Certainement, quelques inconvénients, comme le calcul de  $A_q$ ,  $B_q$  et  $C_q$ , sont évités en utilisant  $P_{22}(s)$ . De plus, le calcul d'un compensateur équivalent pour  $\tilde{P}(s)$  serait impossible en utilisant l'approche hamiltonienne (voir les propositions 8.2, 8.3 et 8.4). Cependant, les compensateurs équivalents ayant  $Q(s)$  dynamique présentent aussi quelques avantages qui justifient l'utilisation de l'approche plus générale adoptée :

– alors que  $A_q$  est construit d'après quelques exigences d'estimation, ce qui rend une estimation physique efficace,  $W_i(s)$  et  $W_o(s)$  sont déterminés indépendamment de ces considérations. En d'autres termes, un compensateur équivalent pour  $P_{22}(s)$

considérerait l'identification de la dynamique fictive aussi importante que celle de la dynamique physique ;

- alors que  $G_{22}(s)$  est, en général, complètement gouvernable et observable,  $P_{22}(s)$  a  $n_k - n$  pôles inobservables ou ingouvernables, ce qui restreint les possibilités de choix de modes ;

- puisque le modèle du système est utilisé pour construire le compensateur équivalent, nous avons aussi besoin d'interpoler la dynamique fictive. Comme nous le montrerons dans la prochaine section, la matrice  $A_q$ , calculée pour cette approche, a des propriétés qui assurent sa stabilité sur les intervalles d'interpolation linéaire. De plus, les dynamiques fictives des compensateurs adjacents peuvent être déterminées en utilisant une continuation analytique de  $A_q$ .

Nous avons introduit un algorithme pour calculer un compensateur ayant une structure estimation/commande équivalent à un compensateur stabilisant associé à un système donné, où l'ordre du correcteur est égal ou supérieur à l'ordre du système ( $n_k \geq n$ ). Le compensateur résultant fournit une estimation physique efficace. Une autre propriété qui le rend bien adapté à l'interpolation est son nombre réduit de coefficients.

### 8.3. Une méthode d'interpolation continue

Les méthodes classiques d'interpolation sont basées sur une philosophie de conception du type « diviser pour régner », par laquelle la conception d'un compensateur non linéaire est décomposée en plusieurs synthèses de compensateurs linéaires [LEI 98a, LEI 98b]. De plus, ces approches fournissent des structures de conception ouvertes dans le sens où il n'y a aucune restriction inhérente à une méthodologie particulière de synthèse des compensateurs linéaires et, généralement, le concepteur est libre d'employer les méthodes d'analyse de stabilité et de performance qui sont les plus convenables à une application particulière.

Bien que la variable d'interpolation soit une fonction du temps dans la mise en œuvre des compensateurs interpolés, elle est considérée comme un paramètre dans l'étape de synthèse. Considérons que l'ensemble de points de fonctionnement peut être paramétrisé par une variable d'interpolation  $\theta \in \mathbb{R}$ , laquelle évolue dans un ensemble compact  $\Theta \subset \mathbb{R}$ . Supposons que  $A(\theta)$ ,  $B(\theta)$  et  $C(\theta)$  en [8.4] et  $A_p(\theta)$ ,  $B_p(\theta)$  et  $C_p(\theta)$  en [8.5] sont des fonctions continues en  $\Theta$ . Supposons aussi que  $K(s, \theta_i)$  en [8.6] sont des compensateurs stabilisants conçus sur  $\theta = \theta_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$ . Le principal objectif d'une procédure d'interpolation est de fournir une loi de transition continue entre des points de fonctionnement,  $\theta_i$  et  $\theta_{i+1}$ ,  $\forall i = 1, \dots, r - 1$ , de façon à préserver la performance obtenue par les compensateurs LTI dans leur voisinage.

Les lois de transition introduisent toujours des distorsions quant à la dégradation de la stabilité/performance dans les zones intermédiaires. Toutefois, lorsque les coefficients du compensateur évoluent de façon continue et leurs gammes de variation sont aussi petites que possible, les distorsions sont gardées dans des limites acceptables. Le prochain paragraphe discute une méthode efficace, basée sur des représentations estimation/commande pour faire face à ce problème. Plus précisément, le problème adressé dans cette section est : *étant donné* les systèmes  $G_{22}(s, \theta)$  [8.4] et  $P_{22}(s, \theta)$  [8.5], maintenant considérés dépendants du paramètre, et un ensemble de compensateurs stabilisants  $K(s, \theta_i)$  [8.6], *calculer* un ensemble de compensateurs de structures estimation/commande équivalents  $K_e(s, \theta_i)$  [8.7], *tel que* la structure propre implicite du compensateur interpolé (voir paragraphes 8.2.4 et 8.3.1) soit connectée de façon continue entre points de fonctionnement. Cela est réalisé par une technique de continuation du type Euler-Newton. Cette procédure permet de calculer un ensemble de compensateurs LTI équivalents, compatibles dynamiquement et assure qu'il existe une trajectoire continue qui connecte leurs réalisations du type estimation/commande.

### 8.3.1. Continuation des sous-espaces invariants sélectionnés

Considérons  $\tilde{\theta}$  le paramètre normalisé  $\tilde{\theta} := (\theta - \theta_i) / \|\theta_{i+1} - \theta_i\|$ . Alors, pour  $\theta \in [\theta_i, \theta_{i+1}]$ , nous avons  $\tilde{\theta} \in [0, 1]$ . Dans [LUI 97], les auteurs présentent une méthode intéressante pour calculer les valeurs propres d'une matrice  $H(\tilde{\theta} = 1) = H(1)$  donnée et les vecteurs propres associés. A partir des valeurs et vecteurs propres d'une matrice  $H(0)$  réelle, les valeurs et vecteurs propres de la matrice paramétrée :

$$H(\tilde{\theta}) := (1 - \tilde{\theta})H(0) + \tilde{\theta}H(1) \quad [8.50]$$

sont suivis séparément à intervalles successifs de  $\tilde{\theta} = 0$  à  $\tilde{\theta} = 1$  en utilisant des techniques de continuation. En  $\tilde{\theta} = 1$ , on obtient donc les données pour  $H(1)$ .

Les valeurs propres de  $H(\tilde{\theta})$  sont des fonctions analytiques de  $\tilde{\theta}$  sauf pour un nombre fini de points où quelques valeurs propres peuvent avoir une singularité algébrique. Loin de ces singularités, les vecteurs propres peuvent être choisis comme fonctions analytiques de  $\tilde{\theta}$ . Ces singularités se produisent lorsque des valeurs propres se croisent ou subissent des bifurcations sur le chemin  $\tilde{\theta} \in [0, 1]$ . Des bifurcations sont rencontrées typiquement lorsqu'un mode fait une transition entre réel et complexe ou devient double et peuvent causer des difficultés calculatoires si elles ne sont pas manipulées convenablement. Quelques techniques pour traiter ces problèmes sans difficultés numériques, selon la nature de la singularité, sont présentées dans [LUI 97]. Cependant, puisque les valeurs et vecteurs propres sont calculés et suivis indépendamment, le mauvais conditionnement dû à des vecteurs propres non orthogonaux constitue un inconvénient de la méthode de continuation dans [LUI 97].

Nous proposons l'utilisation d'une méthode similaire pour obtenir les ensembles correspondants des valeurs propres de matrices hamiltoniennes adjacentes. Au lieu de

suivre chaque mode indépendamment, l'idée est de suivre séparément chaque sous-espace invariant sélectionné correspondant à chaque partition choisie du spectre de l'hamiltonienne. C'est une façon indirecte de suivre un ensemble de modes simultanément. Dans le contexte applicatif de commande de cette étude, cette approche est plus fiable d'un point de vue calculatoire puisque certains problèmes de bifurcation et de mauvais conditionnement dus à des vecteurs propres presque colinéaires sont évités.

Considérons la matrice hamiltonienne :

$$H := \begin{bmatrix} F & R \\ S & M \end{bmatrix} \quad [8.51]$$

où  $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $M \in \mathbb{R}^{n_k \times n_k}$  et  $R, S$  sont réelles de dimensions compatibles. Considérons aussi les ensembles d'équations suivants :

$$\begin{bmatrix} F & R \\ S & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \Lambda_n \quad [8.52]$$

et :

$$\begin{bmatrix} F & R \\ S & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \Lambda_k \quad [8.53]$$

où  $\Lambda_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $\Lambda_k \in \mathbb{R}^{n_k \times n_k}$  sont réelles et bloc-diagonales comme en [8.33],  $U_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $V_2 \in \mathbb{R}^{n_k \times n_k}$  sont inversibles,  $U_2 \in \mathbb{R}^{n_k \times n}$  et  $V_1 \in \mathbb{R}^{n \times n_k}$ . Supposons que les colonnes de  $\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$  et de  $\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$  forment une base pour un sous-espace de  $H$ , respectivement, de dimension  $n$  et  $n_k$ . Alors,  $T_1 = U_2 U_1^{-1}$  ( $\in \mathbb{R}^{n_k \times n}$ ) et  $T_3 = V_1 V_2^{-1}$  ( $\in \mathbb{R}^{n \times n_k}$ ) sont respectivement les solutions des équations de Riccati généralisées, non symétriques et rectangulaires :

$$T_1 F - M T_1 + T_1 R T_1 - S = 0 \quad [8.54]$$

et :

$$T_3 M - F T_3 + T_3 S T_3 - R = 0 \quad [8.55]$$

Il faut remarquer que les colonnes de  $\begin{bmatrix} I \\ T_1 \end{bmatrix}$  et de  $\begin{bmatrix} T_3 \\ I \end{bmatrix}$  engendrent aussi un sous-espace invariant de  $H$  de dimension  $n$  et de dimension  $n_k$  respectivement.

Si nous avons  $H(\theta_i) = A_{cl}(\theta_i)$ ,  $spec(\Lambda_n(\theta_i)) = spec(A(\theta_i) - B(\theta_i)K_c(\theta_i))$  et  $spec(\Lambda_k(\theta_i)) = spec(A(\theta_i) - B(\theta_i)K_c(\theta_i)) \cup spec(A_q(\theta_i))$  en un point de fonctionnement  $\theta_i$ , alors la continuation de  $T_1(\theta_i)$  et  $T_3(\theta_i)$  est suffisante pour déterminer la dynamique correspondante au point de fonctionnement adjacent  $\theta_{i+1}$ .



Admettons que [8.50] soit la matrice paramétrée associée à deux points de fonctionnement adjacents,  $H(\tilde{\theta} = 0) = H(0)$  et  $H(\tilde{\theta} = 1) = H(1)$ . L'équation de Riccati :

$$\mathcal{F}(\tilde{T}, \tilde{\theta}) = \tilde{T}(\tilde{\theta})\tilde{F}(\tilde{\theta}) - \tilde{M}(\tilde{\theta})\tilde{T}(\tilde{\theta}) + \tilde{T}(\tilde{\theta})\tilde{R}(\tilde{\theta})\tilde{T}(\tilde{\theta}) - \tilde{S}(\tilde{\theta}) = 0 \quad [8.56]$$

où  $\tilde{\theta} \in [0, 1]$ , correspond à [8.54] si :

$$\begin{cases} \tilde{T}(\tilde{\theta}) := T_1(\tilde{\theta}) \\ \tilde{F}(\tilde{\theta}) := (1 - \tilde{\theta})\tilde{F}(0) + \tilde{\theta}\tilde{F}(1) = F(\tilde{\theta}) := A(\tilde{\theta}) + B(\tilde{\theta})D_k(\tilde{\theta})C(\tilde{\theta}) \\ \tilde{M}(\tilde{\theta}) := (1 - \tilde{\theta})\tilde{M}(0) + \tilde{\theta}\tilde{M}(1) = M(\tilde{\theta}) := A_k(\tilde{\theta}) \\ \tilde{R}(\tilde{\theta}) := (1 - \tilde{\theta})\tilde{R}(0) + \tilde{\theta}\tilde{R}(1) = R(\tilde{\theta}) := B(\tilde{\theta})C_k(\tilde{\theta}) \\ \tilde{S}(\tilde{\theta}) := (1 - \tilde{\theta})\tilde{S}(0) + \tilde{\theta}\tilde{S}(1) = S(\tilde{\theta}) := B_k(\tilde{\theta})C(\tilde{\theta}) \end{cases} \quad [8.57]$$

et à [8.55] si :

$$\begin{cases} \tilde{T}(\tilde{\theta}) := T_3(\tilde{\theta}) \\ \tilde{F}(\tilde{\theta}) := (1 - \tilde{\theta})\tilde{F}(0) + \tilde{\theta}\tilde{F}(1) = M(\tilde{\theta}) := A_k(\tilde{\theta}) \\ \tilde{M}(\tilde{\theta}) := (1 - \tilde{\theta})\tilde{M}(0) + \tilde{\theta}\tilde{M}(1) = F(\tilde{\theta}) := A(\tilde{\theta}) + B(\tilde{\theta})D_k(\tilde{\theta})C(\tilde{\theta}) \\ \tilde{R}(\tilde{\theta}) := (1 - \tilde{\theta})\tilde{R}(0) + \tilde{\theta}\tilde{R}(1) = S(\tilde{\theta}) := B_k(\tilde{\theta})C(\tilde{\theta}) \\ \tilde{S}(\tilde{\theta}) := (1 - \tilde{\theta})\tilde{S}(0) + \tilde{\theta}\tilde{S}(1) = R(\tilde{\theta}) := B(\tilde{\theta})C_k(\tilde{\theta}) \end{cases} \quad [8.58]$$

Pour effectuer la continuation de  $\tilde{T}$  sur l'intervalle  $[\theta_i, \theta_{i+1}]$ , il est nécessaire d'abord de le subdiviser en sous-intervalles sous la forme  $0 = \tilde{\theta}_0 \leq \tilde{\theta}_1 \leq \tilde{\theta}_2 \leq \dots \leq \tilde{\theta}_L = 1$ . On utilise ensuite une méthode de continuation d'Euler-Newton pour calculer la solution  $\tilde{T}(\tilde{\theta}_{l+1})$ , ( $l = 0, \dots, L-1$ ), de  $\mathcal{F}(\tilde{T}, \tilde{\theta}_{l+1}) = 0$ , en considérant que  $\tilde{T}(\tilde{\theta}_l)$  est une solution connue de  $\mathcal{F}(\tilde{T}, \tilde{\theta}_l) = 0$  dans [8.56].

### 8.3.1.1. Approximation d'Euler

Pour obtenir la solution de Riccati en  $\tilde{\theta}_{l+1}$ , nous appliquons la méthode de Newton à l'équation  $\mathcal{F}(\tilde{T}, \tilde{\theta}_{l+1}) = 0$  avec l'approximation initiale  $\tilde{T}(\tilde{\theta}_{l+1})^{(0)} = \tilde{T}(\tilde{\theta}_l) + (\tilde{\theta}_{l+1} - \tilde{\theta}_l)\dot{\tilde{T}}(\tilde{\theta}_l)$ , où le point dénote la dérivée par rapport au paramètre. Ainsi, en différenciant [8.56] en  $\tilde{\theta} = \tilde{\theta}_l$ , nous obtenons l'équation de Sylvester suivante :

$$\begin{aligned} & [\tilde{T}(\tilde{\theta}_l)\dot{\tilde{R}}(\tilde{\theta}_l) - \dot{\tilde{M}}(\tilde{\theta}_l)]\dot{\tilde{T}}(\tilde{\theta}_l) + \dot{\tilde{T}}(\tilde{\theta}_l)[\dot{\tilde{F}}(\tilde{\theta}_l) + \dot{\tilde{R}}(\tilde{\theta}_l)\tilde{T}(\tilde{\theta}_l)] \\ & + [\dot{\tilde{T}}(\tilde{\theta}_l)\dot{\tilde{F}} - \dot{\tilde{M}}\dot{\tilde{T}}(\tilde{\theta}_l) + \tilde{T}(\tilde{\theta}_l)\dot{\tilde{R}}\tilde{T}(\tilde{\theta}_l) - \dot{\tilde{S}}] = 0 \end{aligned} \quad [8.59]$$

où :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{F}} = \tilde{F}(1) - \tilde{F}(0) \\ \dot{\tilde{M}} = \tilde{M}(1) - \tilde{M}(0) \\ \dot{\tilde{R}} = \tilde{R}(1) - \tilde{R}(0) \\ \dot{\tilde{S}} = \tilde{S}(1) - \tilde{S}(0) \end{cases} \quad [8.60]$$

La première itération de Newton  $\tilde{T}(\tilde{\theta}_{l+1})^{(0)}$  est donc obtenue en résolvant en  $\dot{\tilde{T}}(\tilde{\theta}_l)$  l'équation de Sylvester [8.59] et ensuite en calculant l'échelon d'Euler  $(\tilde{\theta}_{l+1} - \tilde{\theta}_l)\dot{\tilde{T}}(\tilde{\theta}_l)$ .

### 8.3.1.2. Algorithme de Newton

L'objectif ici est de résoudre itérativement l'équation algébrique :

$$\mathcal{F}(\tilde{T}, \tilde{\theta}_{l+1}) = \tilde{T}\tilde{F}(\tilde{\theta}_{l+1}) - \tilde{M}(\tilde{\theta}_{l+1})\tilde{T} + \tilde{T}\tilde{R}(\tilde{\theta}_{l+1})\tilde{T} - \tilde{S}(\tilde{\theta}_{l+1}) = 0 \quad [8.61]$$

à partir d'une condition initiale  $\tilde{T} = \tilde{T}(\tilde{\theta}_{l+1})^{(0)}$ . L'équation [8.61] peut être développée en utilisant le théorème de Taylor. En négligeant les termes d'ordre plus élevé, la forme étendue de [8.61] à la k-ième itération devient l'approximation au premier ordre suivante :

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}\left(\tilde{T}(\tilde{\theta}_{l+1})^{(k)} + \Delta\tilde{T}, \tilde{\theta}_{l+1}\right) \\ & \approx \left[\tilde{T}(\tilde{\theta}_{l+1})^{(k)}\tilde{R}(\tilde{\theta}_{l+1}) - \tilde{M}(\tilde{\theta}_{l+1})\right]\Delta\tilde{T} \\ & \quad + \Delta\tilde{T}\left[\tilde{F}(\tilde{\theta}_{l+1}) + \tilde{R}(\tilde{\theta}_{l+1})\tilde{T}(\tilde{\theta}_{l+1})^{(k)}\right] + \mathcal{F}(\tilde{T}(\tilde{\theta}_{l+1})^{(k)}, \tilde{\theta}_{l+1}) \\ & = 0 \end{aligned} \quad [8.62]$$

Si  $\tilde{T}(\tilde{\theta}_{l+1})^{(k)}$  était exacte, alors  $\mathcal{F}$  et  $\Delta\tilde{T}$  seraient nulles. Néanmoins, comme  $\tilde{T}(\tilde{\theta}_{l+1})^{(k)}$  n'est qu'une approximation de  $\tilde{T}(\tilde{\theta}_{l+1})$ , l'erreur  $\mathcal{F}$  est finie. Les valeurs de la mise à jour sont donc calculées par  $\tilde{T}(\tilde{\theta}_{l+1})^{(k+1)} = \tilde{T}(\tilde{\theta}_{l+1})^{(k)} + \Delta\tilde{T}$ , où  $\Delta\tilde{T}$  est la solution de l'équation de Sylvester [8.62]. Le processus est répété jusqu'au moment où l'erreur  $\|\mathcal{F}\|$  est inférieure à une tolérance spécifiée par l'utilisateur. A condition que  $\tilde{\theta}_{l+1} - \tilde{\theta}_l$  soit suffisamment petit, l'itération de Newton convergera quadratiquement à  $\tilde{T}(\tilde{\theta}_{l+1})$ . En outre, lorsque l'échantillonnage est trop ambitieux ou le système linéaire impliqué dans la solution de l'itération de Newton [8.62] est mal conditionné (quelques modes correspondant à des partitions différentes sont insuffisamment séparés en un point donné de la trajectoire de continuation), l'algorithme de Newton peut ne pas converger ou converger vers une autre solution. Ceci caractérise un saut de chemin. La probabilité qu'une telle situation se produise dans la pratique est faible.

Néanmoins, si elle se produit, elle est transparente pour notre méthode de continuation parce que la trajectoire correcte peut être récupérée facilement en calculant  $\Lambda_n$  (ou  $\Lambda_k$ ) et son complément au cours d'une continuation et en utilisant la propriété que la somme des valeurs propres d'une matrice est égale à sa trace. Tous les sauts de trajectoire peuvent être détectés et identifiés en comparant la somme des valeurs propres calculées et la trace de  $\Lambda_n$  (ou  $\Lambda_k$ ) en deux intervalles successifs d'échantillonnage.

### 8.3.1.3. Algorithme global

Une procédure globale pour le calcul d'un correcteur ayant une structure estimation/commande au point de fonctionnement  $\theta_{i+1}$ , à partir d'un point voisin  $\theta_i$ , se traduit comme suit.

ETAPE 1.– Choisir une partition de  $\text{spec}(H(\theta_i))$ ,  $(\Lambda_n(\theta_i), A_q(\theta_i))$  et  $\Lambda_k(\theta_i)$ , et calculer un compensateur équivalent de structure estimation/commande (algorithme du paragraphe 8.2.4) au point de fonctionnement  $\theta_i$ .

ETAPE 2.– Calculer les solutions  $T_1(\theta_i)$  et  $T_3(\theta_i)$  pour les équations de Riccati [8.54] et [8.55], d'après la partition choisie de  $\text{spec}(H(\theta_i))$ .

ETAPE 3.– Exécuter une continuation d'Euler-Newton de  $T_1(\theta_i)$  et  $T_3(\theta_i)$  (paragraphe 8.3.1.1 et 8.3.1.2) pour obtenir  $T_1(\theta_{i+1})$  et  $T_3(\theta_{i+1})$  qui leur correspondent.

ETAPE 4.– Calculer :

$$\Lambda_n(\theta_{i+1}) = \begin{bmatrix} I \\ T_1(\theta_{i+1}) \end{bmatrix} H(\theta_{i+1}) \begin{bmatrix} I \\ T_1(\theta_{i+1}) \end{bmatrix}^{-1} \quad [8.63]$$

et :

$$\Lambda_k(\theta_{i+1}) = \begin{bmatrix} T_3(\theta_{i+1}) \\ I \end{bmatrix} H(\theta_{i+1}) \begin{bmatrix} T_3(\theta_{i+1}) \\ I \end{bmatrix}^{-1} \quad [8.64]$$

et ensuite les diagonaliser par bloc comme  $\tilde{\Lambda}_{cl}$  en [8.33].

ETAPE 5.– Séparer  $A_q(\theta_{i+1})$  de  $\Lambda_k(\theta_{i+1})$  en comparant les vecteurs propres  $u_p$  et  $v_j$  associés à  $\Lambda_n(\theta_{i+1})$  et  $\Lambda_k(\theta_{i+1})$ , respectivement, c'est-à-dire calculer  $\cos(\theta_{pj}) = \frac{|u_p^T v_j|}{\|u_p\| \|v_j\|}$  pour tout  $p, j$  ( $p = 1, 2, \dots, n$  et  $j = 1, 2, \dots, n_k$ ) pour séparer les  $v_j$  qui n'ont pas un  $u_p$  parallèle correspondant.

ETAPE 6.– En utilisant  $A_q(\theta_{i+1})$  et  $\Lambda_k(\theta_{i+1})$ , calculer le correcteur équivalent au point de fonctionnement  $\theta_{i+1}$  (exécuter seulement l'étape 11 de l'algorithme du paragraphe 8.2.4).

Notons qu'ici  $T_1(\theta_{i+1})$  correspond exactement à la première partition de  $T(\theta_{i+1})$  en [8.15], tandis que la deuxième partition  $T_2(\theta_{i+1})$  est déterminée par  $A_q(\theta_{i+1})$ . D'autre part, comme la solution d'une équation de Riccati est indépendante de l'ordre

des vecteurs et valeurs propres, les gains  $K_c(\theta_{i+1})$  et  $K_f(\theta_{i+1})$  sont indépendants de l'arrangement de  $\Lambda_n(\theta_{i+1})$  et  $\Lambda_k(\theta_{i+1})$ . Un possible changement d'ordre des valeurs propres dans la procédure de diagonalisation (étape 4) affecterait juste les positions des colonnes de  $T_2(\theta_{i+1})$ . Pourtant, l'ordre correct peut être facilement retrouvé en analysant la proximité entre les valeurs propres de  $A_q(\theta_i)$  et de  $A_q(\theta_{i+1})$ .

Il vaut la peine de noter aussi que si  $n_k = n$ , alors  $T_3(\theta) = T_1(\theta)^{-1}$ , et il est donc suffisant d'exécuter un prolongement continu de  $T_1(\theta)$ . En outre, quand il s'agit d'un ensemble de compensateurs LTI, une fois que l'étape 1 est exécutée au début du processus (par exemple,  $i = 1$ ), seules les étapes 2 et 3 sont nécessaires pour déterminer la famille entière de transformations linéaires d'état ( $i = 2, \dots, r$ ). Cette procédure permet de calculer tout l'ensemble de compensateurs équivalents à partir d'un choix unique de la partition de valeurs propres en boucle fermée et assure qu'il existe une trajectoire continue qui connecte leurs réalisations d'état du type estimation/commande.

### 8.3.2. Interpolation

Le sujet principal de cette étude est l'interpolation de correcteurs  $H_\infty$  et  $\mu$ . Notre approche permet toutefois de considérer une classe large d'autres compensateurs. Comme nous l'avons mentionné plus haut, elle est applicable à condition que les compensateurs soient d'ordre plein ou augmenté.

La méthode proposée produit un ensemble de réalisations d'état adéquat à l'interpolation de compensateurs. Lorsque l'ensemble de points de fonctionnement est convenablement choisi, une bonne proximité entre les coefficients correspondants des correcteurs est, en général, obtenue comparativement aux réalisations génériques. Ceci assure pendant la transition un comportement régulier des gains d'estimation et de commande ainsi que du paramètre de Youla. Donc, on peut espérer qu'une interpolation linéaire soit suffisante pour assurer la stabilité locale en boucle fermée pour chaque valeur intermédiaire du paramètre d'interpolation. Cependant, il n'y a aucune restriction à l'utilisation d'une autre stratégie d'interpolation.

Comme les variables d'interpolation comportent généralement les sorties et/ou les états du système, un autre intérêt pratique de cette approche est l'effective estimation de l'état sur tout le domaine de transition. En outre, en supposant que le modèle linéaire est disponible en temps réel, il n'est requis que le stockage de deux gains statiques et d'un nombre réduit de coefficients du paramètre de Youla pour mettre à jour la dynamique du correcteur à chaque instant de l'échantillonnage.

Par rapport aux paramètres de Youla, cette méthodologie produit des matrices dynamiques  $A_q$  étant bloc-diagonales et stables à chaque point de fonctionnement. Il est facile de montrer que, dans notre contexte, l'interpolation linéaire de  $Q(s)$  est

stable. Supposons que  $A_q^k(\theta_i)$  et  $A_q^k(\theta_{i+1})$  soient les  $k$ -ièmes blocs composant la diagonale de  $A_q(\theta)$  en deux points de fonctionnement consécutifs. Considérons le cas général où :

$$A_q^k(\tilde{\theta} = 0) = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a' \end{bmatrix}, \quad a < 0, \quad a' < 0, \quad [8.65]$$

et :

$$A_q^k(\tilde{\theta} = 1) = \begin{bmatrix} c & d \\ -d & c' \end{bmatrix}, \quad c < 0, \quad c' < 0 \quad [8.66]$$

L'équation caractéristique de la matrice bloc-diagonale linéairement interpolée :

$$A_q^k(\tilde{\theta}) = (1 - \tilde{\theta})A_q^k(0) + \tilde{\theta}A_q^k(1), \quad \tilde{\theta} \in [0, 1] \quad [8.67]$$

est :

$$\begin{aligned} \lambda^2 + \lambda \left\{ [(\tilde{\theta} - 1)a - \tilde{\theta}c] + [(\tilde{\theta} - 1)a' - \tilde{\theta}c'] \right\} \\ + \left\{ [(\tilde{\theta} - 1)a - \tilde{\theta}c] [(\tilde{\theta} - 1)a' - \tilde{\theta}c'] + [(\tilde{\theta} - 1)b - \tilde{\theta}d]^2 \right\} = 0 \quad [8.68] \end{aligned}$$

Puisque  $(\tilde{\theta} - 1)x - \tilde{\theta}y > 0, \forall x, y < 0$  et  $\forall \tilde{\theta} \in [0, 1]$ , alors tous les coefficients de [8.68] sont positifs et ses racines sont toujours stables. Cependant, seules trois situations particulières distinctes pour [8.65] et [8.66] sont possibles : les deux matrices  $A_q^k(0)$  et  $A_q^k(1)$  n'ont que des valeurs propres réelles ( $b = 0$  et  $d = 0$ ) ; les deux  $A_q^k(0)$  et  $A_q^k(1)$  n'ont que des valeurs propres complexes ( $a = a'$  et  $c = c'$ ) ; et  $A_q^k(0)$  n'a que des valeurs propres réelles et  $A_q^k(1)$  n'a que des valeurs propres complexes ou *vice versa* ( $b = 0$  et  $c = c'$  ou  $d = 0$  et  $a = a'$ ). Alors, il est suffisant de mettre en effet une interpolation linéaire des réalisations des  $Q$ -paramètres produits par les méthodes décrites dans les sections précédentes pour assurer que  $Q(s) \in \mathcal{RH}_\infty$  sur un intervalle de transition tout entier.

Enfin, la structure estimation/commande  $J_{11}(s)$  en [8.8] peut être aussi considérée comme un correcteur stabilisant d'ordre plein pour un système générique  $(A, B, C)$ . Ainsi, ce dernier résultat généralise, pour les compensateurs d'ordre augmenté, les méthodes d'interpolation proposées dans [STI 99] et [STI 00], où respectivement, les réalisations d'état et les gains de commande et estimation de compensateurs d'ordre plein sont interpolés de façon à préserver la stabilité du système bouclé.

#### 8.4. Applications

Dans cette section, nous illustrons les algorithmes présentés dans les paragraphes 8.2.4 et 8.3.1.3 par un système simple de deuxième ordre. Un problème plus réaliste de pilotage automatique d'un missile est ensuite considéré.

### 8.4.1. Un exemple de deuxième ordre

Considérons le système de deuxième ordre présenté dans [STI 97b]. Le système LPV est défini :

$$P(s, \theta) = G(s, \theta) = \left[ \begin{array}{cc|c} 2 & -\theta & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -2 & 0 \end{array} \right] \quad [8.69]$$

où la variable d'interpolation  $\theta \in [5/6, 7/6]$ . Supposons que la dépendance de  $\theta$  par rapport au temps est exprimé par :

$$\theta(t) = (1-t)7/6 + t5/6, \quad t \in [0, 1] \quad [8.70]$$

Les correcteurs stabilisants conçus en  $t = 0$  et  $t = 1$  et connectés au système selon la figure 8.1a sont, respectivement :

$$K_0(s) = \left[ \begin{array}{cc|c} -80 & -90\,900 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 89\,100 & -18\,711 & 0 \end{array} \right], \quad K_1(s) = \left[ \begin{array}{cc|c} -4,2 & -1\,478 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 1\,355 & -460,7 & 0 \end{array} \right] \quad [8.71]$$

Avec ces correcteurs, quand le temps va de 0 à 1, le système bouclé évolue d'une condition de fonctionnement très stable à l'autre dans la marge de la stabilité.

Le tableau 8.1 montre les données en  $t = 0$  considérées pour le choix de la partition des pôles en boucle fermée, où  $c_i$ ,  $o_i$ ,  $p_i$  et  $\sigma_i$  sont, respectivement, les facteurs de gouvernabilité, d'observabilité et de participation et l'atténuation de  $\lambda_i$  (valeur absolue de la partie réelle).

$i$	$\lambda_i$	$c_i$	$o_i$	$p_i$	$\sigma_i$
1, 2	$-6,16 \pm j7,41$	$1,04 e+7$	1,39	139,0	6,16
3	-51,26	$5,40 e+6$	1,04	61,86	51,3
4	-14,42	$2,58 e+7$	1,14	324,2	14,4

**Tableau 8.1.** Données en boucle fermée en  $t = 0$

En utilisant l'algorithme décrit dans le paragraphe 8.2.4, on obtient la transformation d'état suivante :

$$T(0) = \left[ \begin{array}{cc} -1,583\,8 e-4 & -1,033\,4 e-3 \\ +1,113\,0 e-5 & -2,125\,4 e-5 \end{array} \right] \quad [8.72]$$

En appliquant cette transformation linéaire à la réalisation originale  $K_0$ , en [8.71], on obtient :

$$K_{e0}(s) = \left[ \begin{array}{cc|c} 1417,2 & -2951,9 & -1429,5 \\ 749,59 & -1497,2 & -748,59 \\ \hline -14,32 & -91,68 & 0 \end{array} \right] \quad [8.73]$$

avec :

$$K_c(0) = [14,32 \quad 91,68], \quad K_f(0) = [-1429,5; \quad -748,59] \quad [8.74]$$

$\lambda_{1,2} \in \text{spec}(A - BK_c(0))$  et  $\lambda_{3,4} \in \text{spec}(A - K_f(0)C)$ .

La transformation linéaire d'état en  $t = 1$ , obtenue par continuation, est :

$$T(1) = \left[ \begin{array}{cc|c} -2,6751e-3 & -1,8865e-3 & \\ +6,8196e-4 & -1,3528e-3 & \end{array} \right] \quad [8.75]$$

laquelle, appliquée à la réalisation originale  $K_1$ , produit :

$$K_{e1}(s) = \left[ \begin{array}{cc|c} 273,84 & -554,32 & -275,78 \\ 140,02 & -278,04 & -139,02 \\ \hline -3,94 & -1,93 & 0 \end{array} \right] \quad [8.76]$$

avec :

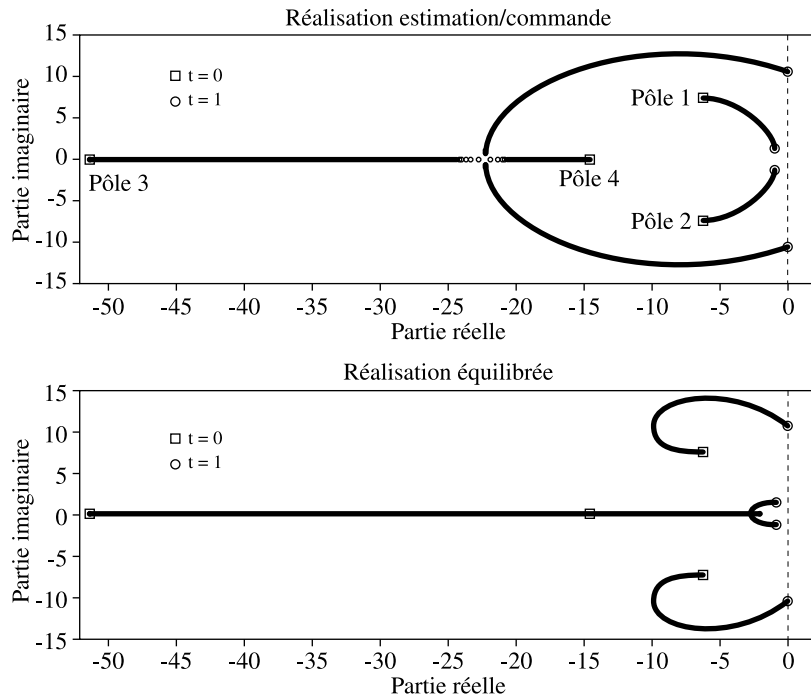
$$K_c(1) = [3,939 \quad 1,933] \quad \text{et} \quad K_f(1) = [-275,78; \quad -139,02] \quad [8.77]$$

Comme dans [STI 97b], nous allons aussi considérer les réalisations balancées des compensateurs :

$$K_{b0}(s) = \left[ \begin{array}{cc|c} -9,7e-6 & 301,5 & 0,104 \\ -301,5 & -80,0 & 298,5 \\ \hline -0,104 & 298,5 & 0 \end{array} \right] \quad [8.78a]$$

$$K_{b1}(s) = \left[ \begin{array}{cc|c} -8,2e-5 & 38,4 & 0,163 \\ -38,4 & -4,2 & 36,8 \\ \hline -0,163 & 36,8 & 0 \end{array} \right] \quad [8.78b]$$

La figure 8.3 montre la localisation des pôles en boucle fermée sur l'intervalle de transition pour l'interpolation linéaire de  $K_c$  et  $K_f$  (ou pour les réalisations de  $K_{e0}$  et  $K_{e1}$ ) et des réalisations balancées ( $K_{b0}$  et  $K_{b1}$ ). Elle illustre le fait que le comportement dynamique, sur les points intermédiaires, du système stationnaire bouclé peut être très dépendant de la réalisation d'état adoptée pour les correcteurs aux points



**Figure 8.3.** Localisation des pôles en boucle fermée sur l'intervalle de transition

extrêmes. Remarquons que les trajectoires des pôles sont complètement distinctes, à l'exception des points terminaux. Ce phénomène affecte aussi le système non stationnaire en boucle fermée qui peut avoir une performance et une stabilité à temps variant très distinctes.

Les figures 8.4, 8.5 et 8.6 montrent les réponses temporelles du système non stationnaire bouclé à une perturbation  $r(t)$  qui comprend des pulsations rectangulaires de magnitude unitaire et de durée 0,1 s appliquées en  $t = 0$  et  $t = 0,4$ . Les performances entrée-sortie sont assez semblables pour les deux interpolations, mais le compensateur formé par l'interpolation de structures estimation/commande a un taux de convergence d'estimation plus rapide.

Il est facile de montrer que les stratégies qui considèrent l'interpolation linéaire des pôles, zéros et gains ou des réalisations canoniques originales [8.71] ne garantissent pas la stabilité. Autrement dit, en utilisant ces approches, le système linéaire bouclé n'est pas stable pour quelques valeurs « congelées » de  $\theta \in [5/6, 7/6]$  et le système non stationnaire est instable.



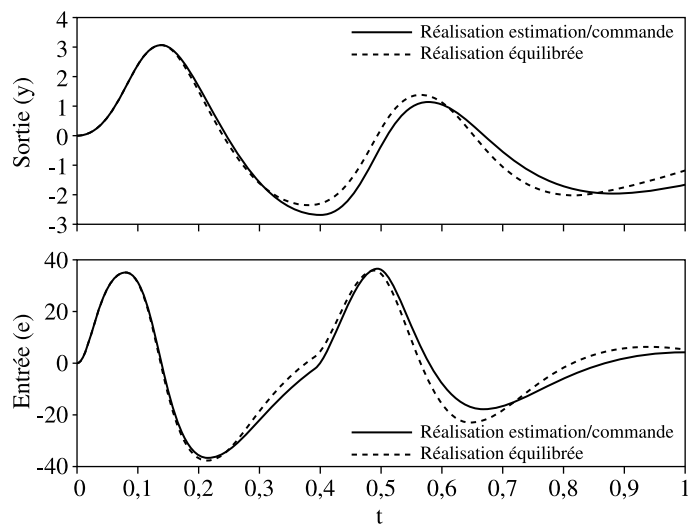


Figure 8.4. Réponse des systèmes non stationnaires

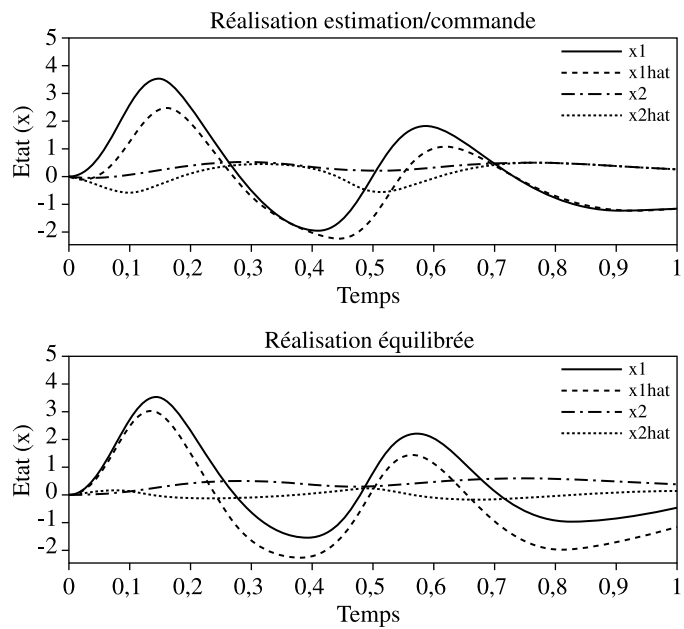


Figure 8.5. Etats des systèmes non stationnaires

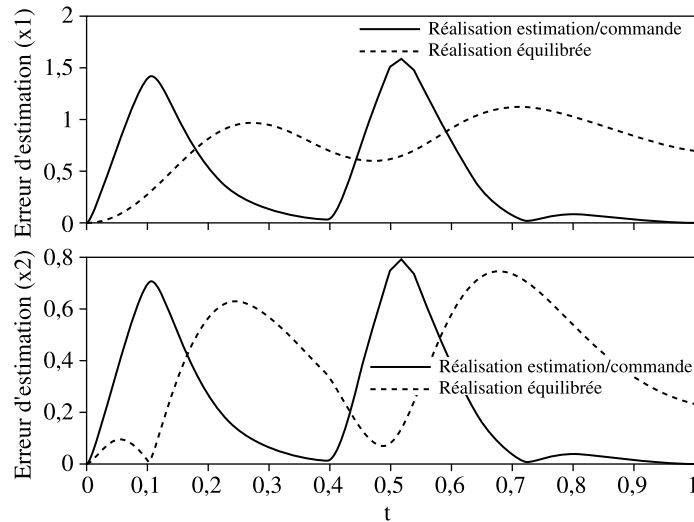


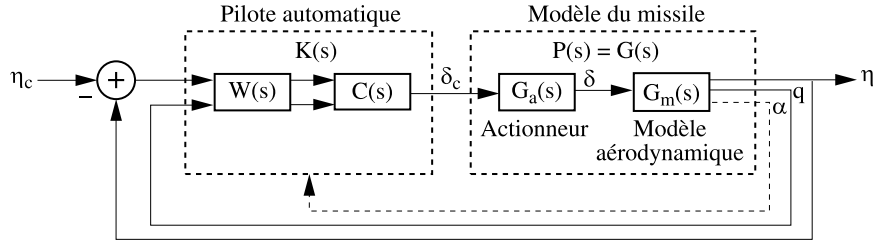
Figure 8.6. L'erreur d'estimation d'état  $|x - \hat{x}|$

#### 8.4.2. Un exemple de pilotage d'un missile

Dans ce paragraphe, nous considérons le problème d'interpolation pour le pilotage en incidence d'un modèle de missile. Le problème consiste à commander un missile pour suivre l'accélération verticale (normalisée) commandée  $\eta_c(t)$  en produisant une déviation de l'empennage  $\delta_c(t)$ . Le modèle non linéaire du missile, la dynamique de l'actionneur et les spécifications pour la conception de correcteurs LTI sont les mêmes que ceux considérés dans [NIC 93] et utilisés dans [STI 97a, STI 99]. Les données numériques sont disponibles dans [NIC 93]. Quelques difficultés majeures de conception d'un compensateur pour cette application sont mises en évidence dans [SIG 00] et [SIR 00].

La structure de commande en boucle fermée est représentée dans la figure 8.7. L'état du missile comprend l'angle d'incidence  $\alpha(t)$ , la vitesse de tangage  $q(t)$  et l'angle de l'empennage  $\delta(t)$  et sa dérivée  $\dot{\delta}(t)$ . L'accélération normalisée  $\eta(t)$  et la vitesse de tangage sont les mesures. Les conditions d'équilibre du système peuvent être paramétrisées par l'angle d'incidence, car nous supposons la vitesse du missile constante à Mach 3. Etant donné que le modèle du missile est symétrique par rapport à  $\alpha = 0$ , les compensateurs linéaires  $C(s)$  sont conçus pour  $\alpha \geq 0$  et interpolés sur  $|\alpha|$ .

Dans [STI 97a, STI 99], Stilwell et Rugh ont considéré l'approche de modelage de valeurs singulières  $H_\infty$  ( $H_\infty$  loop shaping), introduite dans [MAC 90], qui incorpore des compromis performance/stabilité robuste pour concevoir des compensateurs LTI


**Figure 8.7.** Exemple du missile

ayant une structure estimation/commande. Les gains augmentés de retour et d'estimation d'état produits par cette méthode sont déjà appropriés pour l'interpolation (voir [HYD 93]). Alors, nous les comparerons avec les gains obtenus en appliquant notre approche sur des réalisations d'état génériques des compensateurs originaux. Cet exemple permet aussi d'illustrer un autre aspect de notre méthode, car la structure du pilote automatique n'est pas montrée explicitement dans le diagramme de la figure 8.1a.

Le compensateur final  $K(s) := C(s)W(s)$  (figure 8.7) a l'ordre  $n_k = 8$  et est construit en combinant la fonction de pondération  $W(s)$  et le correcteur  $H_\infty$  original :

$$C(s) = \left[ \begin{array}{c|c} A_w + B_w K_c + K_f C_w & -K_f \\ \hline K_c & 0 \end{array} \right] \quad [8.79]$$

où  $(A_w, B_w, C_w)$  sont les matrices d'espace d'état du système pondéré (*shaped plant*)  $G_w(s) = W(s)G(s)$ . Nous considérons des compensateurs LTI pour  $\alpha = 0$ ,  $\alpha = 15$  et  $\alpha = 30$ , et :

$$W(s) = \left[ \begin{array}{cc} g_1 \frac{s-z_1}{s} & 0 \\ 0 & g_2 \frac{s-z_2}{s-p_2} \end{array} \right] \quad [8.80]$$

dont les paramètres sont listés dans le tableau 8.2.

$\alpha$ (degrés)	$g_1$	$z_1$	$g_2$	$z_2$	$p_2$
0	0,163 8	-169,483 8	0,162 3	-7,625 5	-0,634 7
15	0,171 9	-150,532 7	0,271 6	-3,017 5	-1,043 8
30	0,327 6	-105,446 6	0,429 8	-4,004 1	-0,889 8

**Tableau 8.2.** Paramètres pour  $W(s)$

Le filtre  $W(s)$  est connecté en cascade avec le système et le correcteur et compose la fonction de transfert de transmission directe. Donc, il convient de conserver sa structure dans la stratégie d'interpolation pour obtenir une performance satisfaisante en boucle fermée. Dans cet exemple, un correcteur interpolé basé sur un ensemble de compensateurs LTI avec un paramètre de Youla dynamique n'est pas approprié pour être inséré dans la boucle, car la structure du filtre est perdue dans la procédure d'interpolation de  $K_c$ ,  $K_f$  et  $A_q$ . Cependant, comme nous allons le montrer plus bas, une telle structure peut être exploitée d'une manière indirecte pour améliorer l'estimation physique.

Pour l'application de notre méthode, nous considérons d'abord le système pondéré  $G_w(s, \alpha)$  et calculons des transformations d'état linéaires  $T_1(\alpha)$  ( $\alpha = 0, 15, 30$ ). Nous obtenons alors des compensateurs augmentés  $C_1^e(s)$  étant équivalents aux compensateurs  $H_\infty$  originaux  $C^o(s)$  ( $n = n_k = 6$  et  $Q(s) = 0$ ). Les correcteurs globaux sont  $K^o(s) = C^o(s)W(s)$  et  $K_1^e(s) = C_1^e(s)W(s)$ . La structure de commande non stationnaire est obtenue par interpolation linéaire des gains de retour d'état et d'estimation de  $C_1^e(s)$ , tandis qu'une interpolation linéaire de pôles, zéros et gains de  $W(s)$  a été employée pour conserver les propriétés du modelage des valeurs singulières. Des propriétés d'estimation plus faibles sont donc généralement obtenues. Pourtant, les spécifications de performance sont encore satisfaites. Les gains des compensateurs originaux ( $K_c^o$  et  $K_f^o$ ) et équivalents ( $K_{c1}^e$  et  $K_{f1}^e$ ) pour ce cas sont présentés dans le tableau 8.3. D'une part, les gains originaux ont été conçus à chaque point de fonctionnement en utilisant la méthode de synthèse et, d'autre part, l'ensemble de gains équivalents a été obtenu en choisissant une partition des modes en boucle fermée en  $\alpha = 0$  (algorithme du paragraphe 8.2.4) et en exécutant une procédure de continuation (algorithme du paragraphe 8.3.1.3) pour les points restants. Plusieurs réalisations d'état ont été considérées pour le calcul des gains équivalents : les originales [8.79] et d'autres qui ont été obtenues par des transformations linéaires aléatoires. Dans tous les cas, les mêmes ensembles de gains équivalents ont été obtenus. On peut remarquer que, avec quelques exceptions pour les gains d'estimation, les coefficients sont assez proches.

Nous avons aussi calculé des correcteurs  $K_2^e(s) = C_2^e(s)W(s)$  équivalents aux originaux augmentés  $K^o(s) = C^o(s)W(s)$  et aux équivalents augmentés  $K_1^e(s) = C_1^e(s)W(s)$ . Ce calcul considère le système non pondéré  $P(s, \alpha) = G(s, \alpha)$  ( $n_k = 8$ ,  $n = 4$  et  $n_q = 4$ ) et, selon le paragraphe 8.2.4, fournit des améliorations quant à la précision des estimations physiques. Donc, nous avons à notre disposition une famille de transformations  $T_2(\alpha)$  qui convertit  $C_1^e(s)$  en  $C_2^e(s)$ . Ces derniers correcteurs ne sont pas explicitement utilisés dans la boucle, mais leurs transformations associées  $T_2(\alpha)$  sont utilisées pour rehausser les estimations des états du système. Les gains du compensateur équivalent,  $K_{c2}^e$  et  $K_{f2}^e$ , et les réalisations d'état des paramètres de Youla pour  $C_2^e(s)$  sont présentés dans les tableaux 8.4 et 8.5.

$\alpha$	$[K_c^o]^T$	$K_f^o$	$[-K_{c1}^e]^T$	$-K_{f1}^e$
0	$\begin{bmatrix} -27,76 \\ 0,0292 \\ 5,187 \\ 0,407 \\ -0,420 \\ -0,0018 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,936 & 0,952 \\ 11,07 & -23,91 \\ 11,16 & -24,26 \\ 103,14 & -398,90 \\ -5,21 & 34,57 \\ -200,45 & -1125,0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -27,84 \\ 0,0293 \\ 5,194 \\ 0,407 \\ -0,415 \\ -0,0016 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,919 & 0,907 \\ 11,04 & -23,81 \\ 11,14 & -24,19 \\ 113,78 & -426,63 \\ 5,229 & 7,144 \\ -501,98 & -312,61 \end{bmatrix}$
15	$\begin{bmatrix} -25,87 \\ 0,0107 \\ 4,014 \\ 0,456 \\ -0,485 \\ -0,0021 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1,540 & 0,694 \\ 9,744 & -10,12 \\ 9,785 & -10,31 \\ 56,8 & -221,15 \\ -11,17 & 39,43 \\ 119,76 & -1816,9 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -25,91 \\ 0,0107 \\ 4,035 \\ 0,455 \\ -0,472 \\ -0,0018 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1,516 & 0,655 \\ 9,727 & -10,10 \\ 9,782 & -10,31 \\ 72,09 & -246,69 \\ 5,032 & 12,64 \\ -568,8 & -704,1 \end{bmatrix}$
30	$\begin{bmatrix} -34,55 \\ 0,0289 \\ 5,812 \\ 0,650 \\ -0,689 \\ -0,0028 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1,01 & 0,559 \\ 5,401 & -7,900 \\ 5,425 & -8,086 \\ 35,02 & -238,85 \\ -10,31 & 64,68 \\ 121,62 & -2367,2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -37,74 \\ 0,0316 \\ 6,490 \\ 0,702 \\ -0,760 \\ -0,0025 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,974 & 0,461 \\ 5,211 & -7,393 \\ 5,240 & -7,594 \\ 40,93 & -257,68 \\ 7,614 & 14,95 \\ -863,95 & 127,36 \end{bmatrix}$

**Tableau 8.3.** Gains de commande et d'estimation augmentés

$\alpha$	$[K_{c2}^e]^T$	$K_{f2}^e$
0	$\begin{bmatrix} -7,05 e-3 \\ -1,78 e-3 \\ -9,70 e-1 \\ -7,44 e-3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,0242 & 1,091 \\ 27,73 & 99,26 \\ 0,293 & -0,952 \\ -127,97 & 15,43 \end{bmatrix}$
15	$\begin{bmatrix} 4,90 e-2 \\ 1,97 e-3 \\ -9,72 e-1 \\ -7,08 e-3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,0214 & 1,075 \\ 23,81 & 84,92 \\ 0,525 & -2,967 \\ -187,59 & 110,00 \end{bmatrix}$
30	$\begin{bmatrix} 1,03 e-1 \\ 4,81 e-3 \\ -9,58 e-1 \\ -6,17 e-3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,00695 & 1,102 \\ -8,30 & 128,08 \\ -0,975 & -5,449 \\ -33,80 & -197,01 \end{bmatrix}$

**Tableau 8.4.** Gains de commande et d'estimation physique

Les valeurs des pôles en boucle fermée et leur distribution pour tous les compensateurs et tous les points de fonctionnement sont présentées dans les tableaux 8.6 et 8.7, où  $C_{tr}^o = A_w + B_w K_c^o$ ,  $O_{bs}^o = A_w + K_f^o C_w$ ,  $C_{tr1}^e = A_w - B_w K_{c1}^e$ ,  $O_{bs1}^e = A_w - K_{f1}^e C_w$ ,  $C_{tr2}^e = A - B K_{c2}^e$  et  $O_{bs2}^e = A - K_{f2}^e C_w$ , avec  $(A, B, C)$  les

$\alpha$	$Q(s)$					
0	-102,36	110,08	0	0	6 451,5	-16 470,0
	-110,08	-102,36	0	0	-3 872,1	8 821,4
15	0	0	-12,64	9,051	5 273,9	271,91
	0	0	-9,051	-12,64	-427,97	1 431,1
	$-3,694 e-3$	$-7,994 e-4$	$5,294 e-5$	$1,803 e-5$	0	0
30	-100,16	112,06	0	0	5 967,9	-15 983,0
	-112,06	-100,16	0	0	-3 330,6	8 349,0
15	0	0	-15,98	11,71	5 700,5	-262,66
	0	0	-11,71	-15,98	1 809,3	889,86
	$-3,524 e-3$	$-7,599 e-4$	$5,878 e-5$	$4,526 e-5$	0	0
30	-98,24	123,43	0	0	155,84	-4 322,6
	-123,43	-98,24	0	0	9 918,8	-39 712,0
15	0	0	-16,06	11,26	4 872,3	83,31
	0	0	-11,26	-16,06	-2 035,4	1 150,8
	$1,730 e-3$	$-3,179 e-3$	$1,555 e-4$	$-6,156 e-5$	0	0

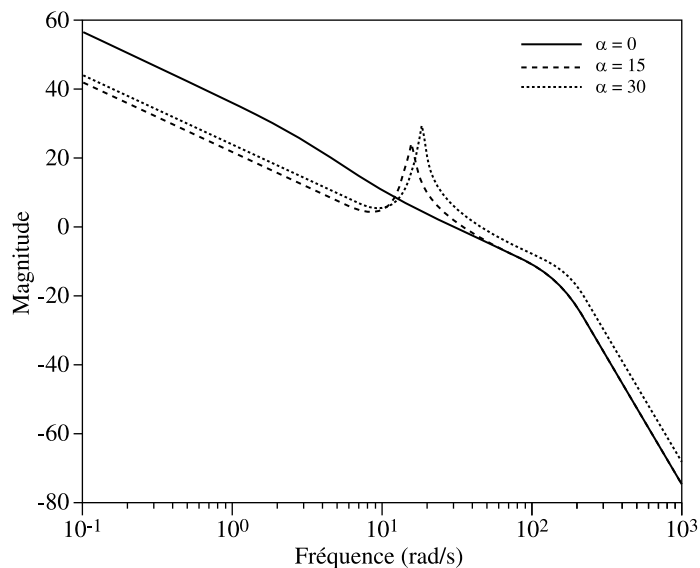
Tableau 8.5. Coefficients du paramètre de Youla

matrices d'espace d'état de  $G(s)$ . Quelques modes doubles ou « presque » doubles ont interféré sur le choix de la partition initiale des pôles. Pourtant, il y a une distribution cohérente pour tous les points de fonctionnement.

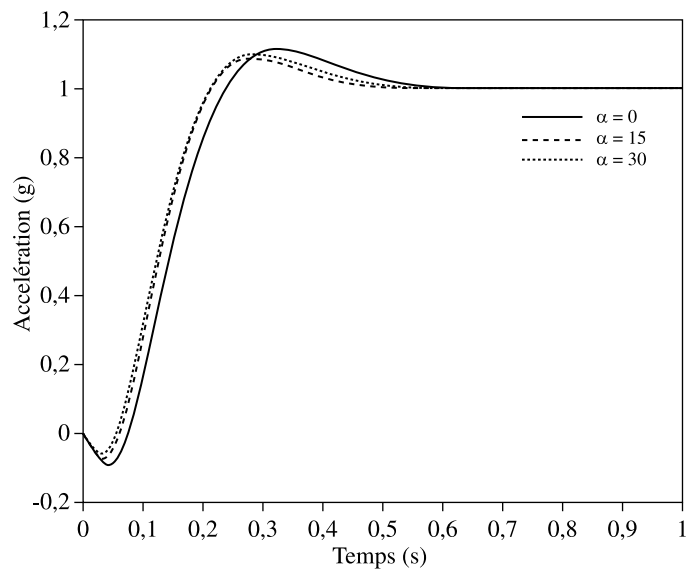
Pôles	$\alpha = 0$	$\alpha = 15$	$\alpha = 30$
1	-0,634 7	-1,043 8	-0,889 75
2	-0,634 7	-1,043 8	-0,889 75
3, 4	$-10,534 \pm j8,287 9$	$-12,397 \pm j9,712 4$	$-11,404 \pm j8,554 8$
5, 6	$-12,636 \pm j9,050 9$	$-15,984 \pm j11,708$	$-16,063 \pm j11,259$
7	-21,547	-26,064	-48,670
8	-100,17	-87,787	-134,86
9, 10	$-102,36 \pm j110,08$	$-100,16 \pm j112,06$	$-98,243 \pm j123,43$
11, 12	$-104,49 \pm j107,75$	$-103,60 \pm j108,76$	$-101,86 \pm j111,39$

Tableau 8.6. Pôles en boucle fermée

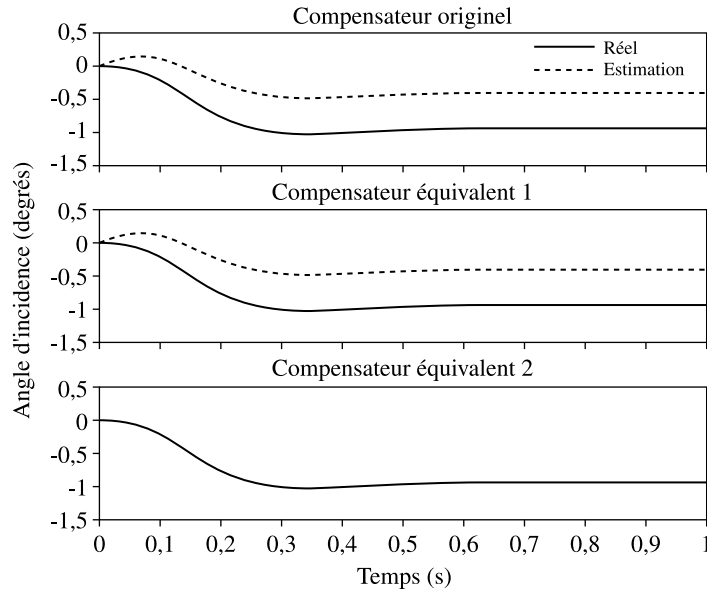
Les réponses fréquentielles en boucle ouverte et les temporelles à l'échelon unitaire en boucle fermée pour les compensateurs originaux et équivalents sont montrées par les figures 8.8 et 8.9 à 8.12, respectivement. On observe le même comportement consigne-sortie pour tous les correcteurs et une amélioration considérable de l'estimation d'état pour  $K_2^e(s)$ .



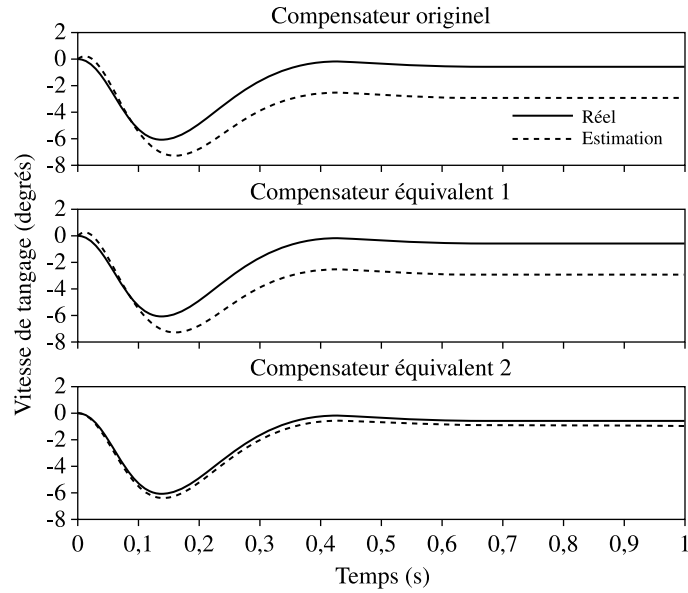
**Figure 8.8.** Réponse fréquentielle en boucle ouverte ( $KG(s)$ )



**Figure 8.9.** Réponse à l'échelon du système en boucle fermée linéarisé en  $t = 0$  – accélération



**Figure 8.10.** Réponse à l'échelon du système en boucle fermée linéarisé en  $t = 0$  – angle d'incidence



**Figure 8.11.** Réponse à l'échelon du système en boucle fermée linéarisé en  $t = 0$  – vitesse de tangage



Pôles	$spec(C_{tr}^o)$	$spec(O_{bs}^o)$	$spec(C_{tr1}^e)$	$spec(O_{bs1}^e)$	$spec(C_{tr2}^e)$	$spec(O_{bs2}^e)$	$spec(A_q)$
1	*		*		*		
2		*		*		*	
3, 4	*		*		*		
5, 6		*		*			*
7	*		*		*		
8		*		*		*	
9, 10		*	*				*
11, 12	*			*		*	

Tableau 8.7. Distribution des pôles en boucle fermée

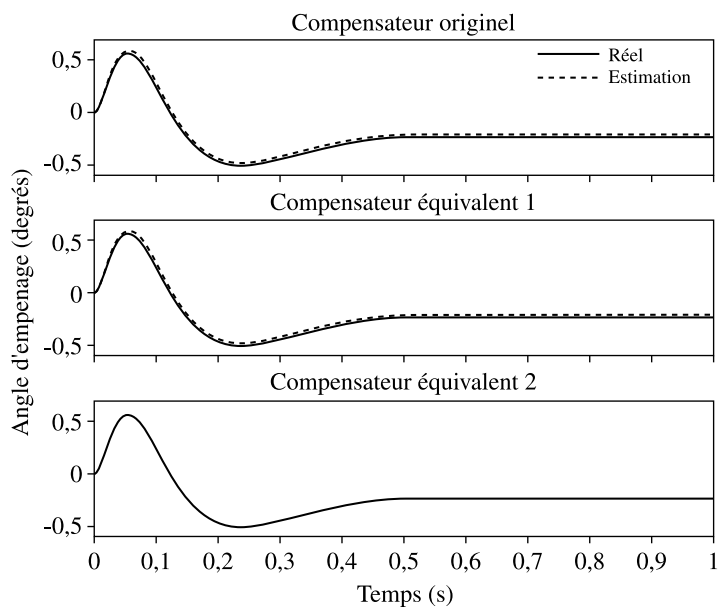
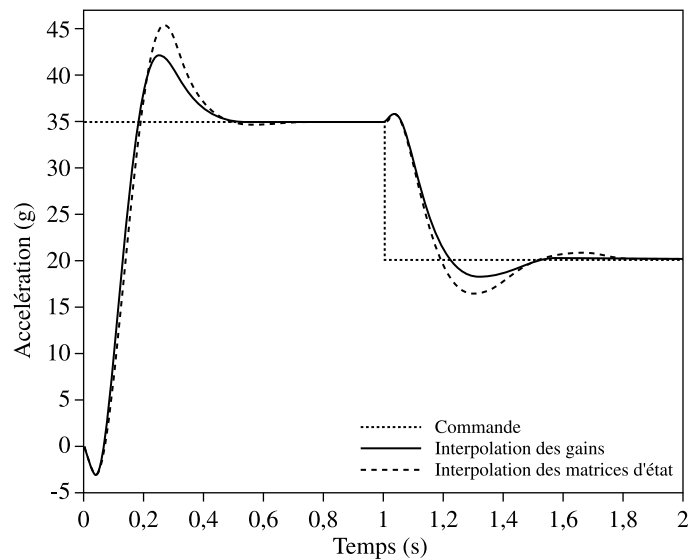


Figure 8.12. Réponse à l'échelon du système en boucle fermée linéarisé en  $t = 0$  – angle d'empennage

Les figures 8.13 et 8.14 montrent les réponses en boucle fermée du modèle non linéaire à une séquence d'entrées en échelon, en considérant l'interpolation linéaire des gains de retour d'état et d'estimation de  $K_1^e(s)$  et des matrices d'espace d'état de  $K^o(s)$ . L'amplitude des excitations a été choisie telle que  $\alpha$  couvre la plupart du domaine d'interpolation et que les conditions en régime permanent soient différentes d'un point de conception. Dans ce cas, les réponses temporelles du pilote automatique qui utilise l'interpolation des matrices présentent un plus grand dépassement et

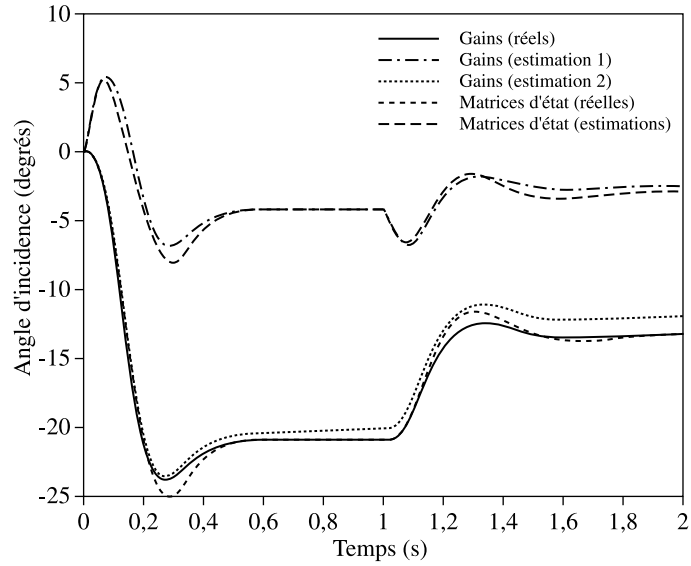
un plus petit facteur d'amortissement. L'estimation 2 dans la figure 8.14 a été obtenue en appliquant sur les états du correcteur  $C_1^e(s, \alpha)$  une transformation linéaire qui consiste en une interpolation linéaire de  $T_2(\alpha)$ . Ce résultat montre que l'estimation de  $\alpha$  peut être améliorée lorsque cette variable n'est pas mesurée. Les figures 8.15 et 8.16 montrent la migration des pôles dominants en boucle fermée (3 et 5 ou 4 et 6) d'un point de fonctionnement à l'autre, d'après les trajectoires de  $\alpha$  dans la figure 8.14. Pour l'interpolation des gains  $K_{c1}^e$  et  $K_{f1}^e$ , ce lieu des racines est moins dispersé et présente de plus petites variations sur la fréquence naturelle non amortie ( $\omega_n$ ) et sur le facteur d'amortissement ( $\zeta$ ).



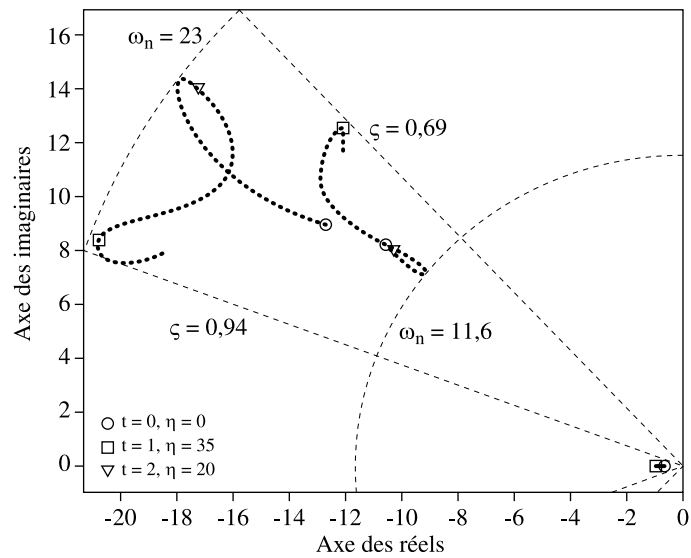
**Figure 8.13.** Réponse du système non linéaire en boucle fermée à une séquence d'entrées en échelon – accélération

## 8.5. Conclusion

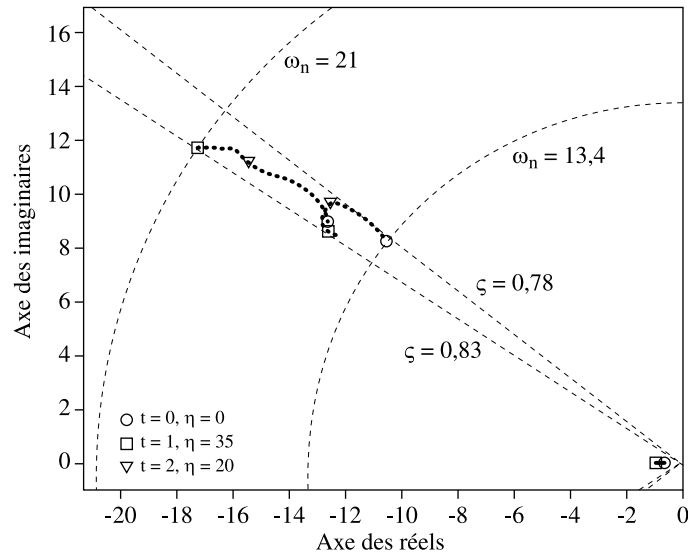
Cette étude a considéré le calcul d'un ensemble de transformations linéaires d'espace d'état pour une famille de correcteurs LTI à interpoler. L'ensemble des compensateurs transformés assure un comportement régulier du correcteur interpolé, car ils présentent une structure estimation/commande où les différences de dynamiques sont minimisées. Cela permet une interpolation continue entre points de fonctionnement et conduit à des restrictions plus faibles sur la limite supérieure du taux de variation du paramètre qui garantit la stabilité. Cette approche a un intérêt physique et est exécutée en deux étapes : premièrement, des sous-espaces invariants associés aux valeurs propres de la boucle fermée sont sélectionnés de façon que l'état du compensateur,



**Figure 8.14.** Réponse du système non linéaire en boucle fermée à une séquence d'entrées en échelon – angle d'incidence



**Figure 8.15.** Localisation des pôles dominants en boucle fermée sur la trajectoire de  $\alpha(t)$  – interpolation de matrices d'espace d'état



**Figure 8.16.** Localisation des pôles dominants en boucle fermée sur la trajectoire de  $\alpha(t)$  – interpolation de gains

conçu sur un point de fonctionnement donné, soit séparé en deux parties : une estimation de l'état du système et l'état du paramètre de Youla. Un algorithme simple et stable numériquement est introduit dans ce but. Deuxièmement, une continuation analytique des sous-espaces invariants sélectionnés est exécutée pour obtenir une famille homogène de transformations d'état. Un algorithme fondé sur une technique de continuation d'Euler-Newton de deux équations de Riccati généralisées, non symétriques et rectangulaires a été construit. Des problèmes numériques sont aussi discutés et des solutions sont proposées pour une mise en œuvre systématique de l'algorithme global.

Un exemple simple et un problème plus réaliste de pilotage d'un missile ont été présentés pour démontrer les avantages de la méthode : en utilisant une stratégie d'interpolation linéaire simple, nous avons obtenu des transitions régulières entre correcteurs et une bonne estimation physique. Puisque le « placement » des compensateurs LTI et la stratégie d'interpolation ont été déterminés, ces avantages sont généralement indépendants des représentations d'état du compensateur original, mais peuvent être très dépendants d'autres propriétés du correcteur. Par exemple, un grand nombre de modes doubles en boucle fermée, résultant de correcteurs peu appropriés, peuvent défavoriser la performance de l'approche.

Lorsque des compensateurs  $H_\infty$  d'ordre augmenté sont synthétisés, cette approche fournit une façon de construire des réalisations d'état où une interpolation linéaire des paramètres de Youla est stable. Par conséquent, les méthodes d'interpolation de

compensateur d'ordre plein qui assurent la stabilité peuvent être appliquées dans ce contexte sans perte de leurs propriétés. Cependant, les schémas de commande où les fonctions de pondération sont dans la boucle posent quelques limitations pour l'utilisation de l'approche du paramètre de Youla dynamique. Dans ce cas, la fonction de pondération devient implicite dans les réalisations des compensateurs transformés et sa structure est perdue dans la procédure d'interpolation. Donc, la méthode proposée doit être utilisée avec précaution dans cette situation particulière.

## 8.6. Bibliographie

- [ALA 99] ALAZARD D., APKARIAN P., « Exact observer-based structures for arbitrary compensators », *International Journal on Robust Nonlinear Control*, vol. 9, p. 101-118, 1999.
- [APK 95] APKARIAN P., GAHINET P., « A convex characterization of gain-scheduled  $H_\infty$  controllers », *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 40, n° 5, p. 853-864, 1995.
- [APK 98] APKARIAN P., ADAMS R., « Advanced gain-scheduling techniques for uncertain systems », *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 6, p. 21-32, 1998.
- [BEN 85] BENDER D.J., FOWELL R.A., « Computing the estimator-controller form of a compensator », *International Journal on Control*, vol. 41, n° 6, p. 1565-1575, 1985.
- [GOL 96] GOLUB G.H., VAN LOAN C.F., *Matrix computations*, J. Hopkins University Press, 1996.
- [HAM 89] HAMDAN A.M.A., NAYFEH A.H., « Measures of modal controllability and observability for first- and second-order linear systems », *Journal of Guid. Contr. and Dyn.*, mai-juin 1989.
- [HYD 93] HYDE R.A., GLOVER K., « The application of scheduled  $H_\infty$  controllers to a VSTOL aircraft », *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 38, n° 7, p. 1021-1039, 1993.
- [KAM 95] KAMINER I., PASCOAL A.M., KHARGONEKAR P.P., COLEMAN E.E., « A velocity algorithm for the implementation of gain-scheduled controllers », *Automatica*, vol. 31, n° 8, p. 1185-1191, 1995.
- [KEL 91] KELLET M., « Continuous scheduling of  $H_\infty$  controllers for a MS760 Paris aircraft », dans *Robust control systems design using  $H_\infty$  and related methods*, p. 197-219, P.H. Hammond, Londres, 1991.
- [KUN 94] KUNDUR P., *Power system stability and control*, McGraw-Hill, Inc., 1994.
- [LAW 95] LAWRENCE D.A., RUGH W.J., « Gain scheduling dynamic linear controllers for a nonlinear plant », *Automatica*, vol. 31, n° 3, p. 381-390, 1995.
- [LEI 98a] LEITH D.J., LEITHEAD W.E., « Appropriate realization of MIMO gain scheduled controllers », *International Journal on Control*, vol. 70, p. 13-50, 1998.
- [LEI 98b] LEITH D.J., LEITHEAD W.E., « Gain-scheduled and nonlinear systems: Dynamic analysis by velocity based linearization families », *International Journal on Control*, vol. 70, p. 289-317, 1998.

- [LEI 98c] LEITH D.J., LEITHEAD W.E., « Gain-scheduled controller design: An analytic framework directly incorporating non-equilibrium plant dynamics », *International Journal on Control*, vol. 70, p. 249-269, 1998.
- [LUI 97] LUI S.H., KELLER H.B., KWOK T.W.C., « Homotopy method for the large, sparse, real nonsymmetric eigenvalue problem », *SIAM, Journal Matrix Anal. Appl.*, vol. 18, n° 2, p. 312-333, 1997.
- [MAC 90] MACFARLANE D.C., GLOVER K., *Robust controller design using normalized coprime factor plant descriptions*, Springer-Verlag, Lecture Notes in Control and Information Sciences 138, 1990.
- [MAR 90] MARTINS N., LIMA L.T.G., « Determination of suitable location for power system stabilizers and static VAR compensator for damping electromechanical oscillations in large scale power systems », *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 5, n° 4, p. 1455-1469, 1990.
- [NIC 93] NICHOLS R.A., REICHERT R.T., RUGH W.J., « Gain scheduling for  $H_\infty$  controllers: A flight control example », *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 1, n° 2, p. 69-79, 1993.
- [PAC 94] PACKARD A., « Gain-scheduling via linear fractional transformations », *System and Control Letters*, vol. 22, p. 79-92, 1994.
- [RUG 91] RUGH W.J., « Analytical framework for gain scheduling », *IEEE Control Systems Mag.*, vol. 11, n° 2, p. 79-84, 1991.
- [SHAH 92] SHAHRUZ S.M., BEHTASH S., « Design of controllers for linear parameter varying systems by the gain scheduling technique », *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 168, n° 1, p. 195-217, 1992.
- [SHAM 90] SHAMMA J.S., ATHANS M., « Analysis of gain scheduled control for nonlinear plants », *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 35, n° 8, p. 898-907, 1990.
- [SIG 00] SIGUERDIDJANE H., DAVAUD E., « Nonlinear missile autopilot design based on angle of attack normal form », *European Journal on Control*, vol. 6, p. 154-164, 2000.
- [SIR 00] SIRA-RAMIREZ H., LOVERA M., « Discussion on: "Nonlinear missile autopilot design based on angle of attack" by H. Siguerdidjane and E. Davaud », *European Journal on Control*, vol. 6, p. 165-169, 2000.
- [STI 97a] STILWELL D.J., RUGH W., Interpolation of observer state feedback controllers for gain scheduling, John Hopkins University, Department of electrical and computer engineering, Baltimore, Rapport technique JHU/ECE 97-09, 1997.
- [STI 97b] STILWELL D.J., RUGH W., Stability preserving interpolation methods for the synthesis of gain scheduled controllers, John Hopkins University, Department of electrical and computer engineering, Baltimore, Rapport technique JHU/ECE 97-18, 1997.
- [STI 99] STILWELL D.J., RUGH W., « Interpolation of observer state feedback controllers for gain scheduling », *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 44, n° 6, p. 1225-1229, 1999.

- [STI 00] STILWELL D.J., RUGH W., « Stability preserving interpolation methods for the synthesis of gain scheduled controllers », *Automatica*, vol. 36, n° 5, p. 665-671, 2000.
- [ZHO 96] ZHOU K., DOYLE J.C., GLOVER K., *Robust and optimal control*, p. 321-322, Prentice Hall, New Jersey, 1996.